詳細解答

STEP I 2013，第 1 題

純數學 • 含平方根的方程

> **STEP I 2013，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q1

關鍵思路

每條方程其實都是一條經過偽裝的二次方程（quadratic equation）。把平方根（square root）記作 y，再把其餘一切以 y 表示，就得到一條關於 y 的普通二次方程。唯一要留意的是平方根永不為負，所以 $y \geq 0$：每一次都正是這個條件把增根（spurious root）剔除。

解答

第 (i) 部分

設 $y = \sqrt{x}$，$y \geq 0$，則 $x = y^2$，方程變為

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

取負號會得到負值，而平方根不可能是負數。由於 $\sqrt{11} > 3$，取正號得 $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$，所以這是唯一的可能。於是

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

一旦知道 $y \geq 0$，每一步都是可逆的（reversible），所以這確實是（唯一的）實根。

第 (ii)(a) 部分

這裏開平方的是 $x+2$，所以設 $y=\sqrt{x+2}$，$y\geq 0$，得 $x=y^2-2$。方程變為

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

由於 $y\geq 0$，我們捨棄 $y=-12$，故 $y=2$，而 $x=2^2-2=2$。

驗證：$2+10\sqrt{4}-22=0$。唯一的實根是 $x=2$。

> **想一想** 如果保留了 $y=-12$，會發生甚麼事？

這會得到 $x=144-2=142$，而 $142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$。$y=-12$ 是相關方程 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$ 的根；如果你粗心地把式子平方，你所解的其實就是這條方程。條件 $y\geq 0$ 正是把兩者區分開來的關鍵。

第 (ii)(b) 部分

這次題目沒有提示代換（substitution），所以我們要自己找一個。根號內的式子是

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

而 x^2-4x 亦出現在根號外。這就是兩者之間的聯繫。

> **想一想** 這裏 y 應該取甚麼：x^2-4x，還是整個平方根？

取 y 為平方根，方程就會變成一條不含根號的二次方程。設 $y=\sqrt{2x^2-8x-3}$，其中 $y\geq 0$。則 $y^2=2(x^2-4x)-3$，所以

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

代入方程，得

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

由於 $y\geq 0$，必須 $y=3$。於是

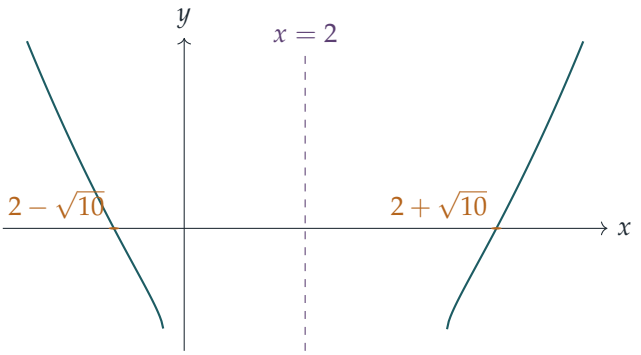
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

這兩個值都使 $2x^2-8x-3$ 等於 9，是正數，所以平方根有定義且等於 3。因此兩者都是真正的根：實根為

$$x=2+\sqrt{10} \quad 及 \quad x=2-\sqrt{10}.$$

這兩個根關於 $x = 2$ 對稱（symmetric），這是理所當然的，因為方程只透過 $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ 依賴於 x。

左方的圖像顯示了這一點。它只在 $2x^2 - 8x - 3 \geq 0$ 時有定義，即 $x \leq 2 - \sqrt{5.5}$ 或 $x \geq 2 + \sqrt{5.5}$，而且在每一支上各穿過零一次。



驗算

- 第 (i) 部分：$x = \frac{1}{2}(10 - 3\sqrt{11}) \approx 0.02506$，所以 $\sqrt{x} \approx 0.1583$，而 $x + 3\sqrt{x} \approx 0.02506 + 0.47494 = 0.5$。
- 第 (ii)(b) 部分：$x = 2 + \sqrt{10} \approx 5.1623$ 給出 $x^2 - 4x = 6$ 及 $2x^2 - 8x - 3 = 9$，所以左方為 $6 + 3 - 9 = 0$。被捨棄的值 $y = -5$ 需要 $x^2 - 4x = 14$，此時左方為 $14 + 5 - 9 = 10 \neq 0$。
- 在每個左方式子的整個定義域（domain）上作數值掃描，所找到的根恰好是上述各根，別無其他。

常見錯誤

- 保留了關於 y 的二次方程的負根。平方根永不為負，所以那個根不會給出解。
- 在 (ii)(b) 一開始就把兩邊平方。這會得到一條四次方程（quartic equation），難度大得多，而且會引入額外的根，之後還得逐一檢驗。
- 在 (ii)(a) 忘記了 $x = y^2 - 2$，而不是 y^2。

STEP 之外

引入新變量，把一條困難的方程化為熟悉的方程，是數學中最有用的習慣之一。在 (ii)(b) 中，方程只依賴於 $x^2 - 4x$，所以它是 $(x-2)^2$ 的函數。看出這類對稱性（sym-

metry），並處理在該對稱下保持不變的量，這種做法在伽羅瓦（Galois）理論（Galois theory）中會再次出現：在那裏，人們透過找出根的、在對稱變換下保持不變的表達式來解多項式方程（polynomial equation）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是進入這些概念的一條平易途徑。若想做更多這類題目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）非常出色（而且免費）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。