詳細解答

STEP III 2012，第 9 題

力學 • 轉動滑輪的動力學

STEP III 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

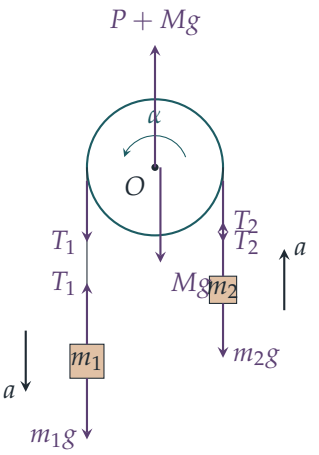
step.maths.org/questions/12-s3-q9

關鍵思路

測得的軸上作用力就是線索。滑輪的質心（centre of mass）不會移動，所以軸必須承托滑輪的重量，同時平衡兩段繩的張力（tension）。由此 P 就是兩個張力之和，從而可以求出兩個質點的加速度。知道加速度之後，滑輪的轉動方程就能給出轉動慣量（moment of inertia）。摩擦力偶（friction couple）只會改變這一條方程，其他一概不變。

解答

模型。兩個質點視為質點，繩是輕（light）而不可伸長（inextensible）的。繩在滑輪上不打滑，所以繩的速率等於圓盤邊緣的速率。我們假設系統由靜止釋放，因此較重的質點 m_1 下降。設 a 為 m_1 向下的加速度，這也是 m_2 向上的加速度。於是滑輪的角加速度（angular acceleration）為 $\alpha = a/r$。m_1 一側繩的張力為 T_1，m_2 一側為 T_2（兩者不同，因為滑輪有慣性）。設 I 為滑輪繞軸的轉動慣量。



對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m_1g - T_1 = m_1a, \qquad T_2 - m_2g = m_2a,$$

所以

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

軸上的作用力。滑輪的質心位於固定點 O，所以滑輪所受的合力為零。作用在滑輪上的力有：它的重量 Mg、兩個張力（兩者都向下拉，因為兩側的繩都是豎直懸垂的），以及軸施加的力。摩擦力偶（我們在第 (ii) 部分才加入）沒有合力（resultant），所以不會在這裏出現。因此軸上的豎直作用力為 $Mg + T_1 + T_2$，與測量值比較，得

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

所以

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

這只用到測量值和兩個質點的方程，所以在兩部分中都成立。

第 (i) 部分

軸上沒有摩擦時，只有張力對 O 有力矩（moment）。對軸取力矩，

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

而 $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$，所以

$$I = r^2\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2)\right).$$

把 (1) 代入 a：

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right)\\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P}\\ &= \frac{((m_1+m_2)P-4m_1m_2g)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

其中用到 $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$。這就是 $(*)$，證畢。

第 (ii) 部分

把新的計算值記為 I'。摩擦力偶 C 阻礙轉動，而轉動方向是由 T_1 驅動的方向，所以力矩方程變成

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

加速度仍然由 (1) 給出，因為所用的是同一個測量值 P，而關於軸上作用力的論證並不涉及 C。所以 T_1-T_2 和 a 與第 (i) 部分完全相同，於是

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

想一想 我們怎樣知道 a 的正負？

系統由靜止開始，滑輪轉動時 m_1 向下移動，所以 m_1 必定有正的向下加速度。(如果 a 為零或負數，m_1 根本不會開始向下移動。)所以 $a>0$。由於 $C>0$ 且 $r>0$，得 $Cr/a>0$，因此**考慮摩擦後算出的值比 $(*)$ 小**。這是合理的：張力產生的淨扭矩（torque）有一部分用來克服摩擦，所以只需較小的慣性就能解釋同一個觀測到的加速度。

C 的上界。把張力代入力矩方程：

$$((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a)r-C=\frac{I'a}{r},$$

整理後得

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

右邊 $a>0$、$I'\geq 0$（轉動慣量不可能是負數）而且 $(m_1+m_2)r>0$，所以右邊嚴格為正。因此

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

證畢。換句話說，摩擦力偶必須小於兩邊重量不平衡所產生的力偶 $(m_1-m_2)gr$。否則系統根本不會開始移動。

驗算

- 輕滑輪：若 $I = 0$ 且 $C = 0$，則 $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$（熟悉的阿特伍德機（Atwood machine）結果），而 $P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$。此時 $(*)$ 的分子為零，正如預期。
- 靜止的滑輪：當 $a \to 0$ 時，$P \to (m_1 + m_2)g$，$(*)$ 的分母趨於零，$(*)$ 趨於無限大。無限重的滑輪不會產生加速度。
- 數值驗算：取 $g = 9.8$、$m_1 = 3$、$m_2 = 1$、$r = 0.5$、$I = 0.7$ 及 $C = 2$（國際單位制），真實運動中 $a \approx 2.29\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，$P \approx 34.6\ \mathrm{N}$。公式 $(*)$ 給出 $I \approx 1.14$，恰好多了 $Cr/a \approx 0.44$，而考慮摩擦的模型則還原出 0.7。這裏 $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$。我們用同樣方法測試了 10^4 個隨機例子。

常見錯誤

- 以為兩側的張力相同。這只對輕滑輪或無摩擦滑輪成立，而在這裏會令 I 從問題中消失。
- 計算軸上作用力時忘記滑輪本身的重量。這正是測量值寫成 $P + Mg$ 的原因。
- 以為摩擦力偶會改變軸上的作用力。力偶的合力為零，所以兩部分中都有 $P = T_1 + T_2$。

STEP 之外

這是從測量推斷隱藏參數的一個小例子。答案取決於你所假設的模型，而忽略摩擦會令估計值朝一個可預測的方向偏差。在大學一年級的力學中，剛體會用線動量和角動量的完整理論來處理，而對於繞一般軸轉動的物體，轉動慣量會變成一個張量（tensor）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）深入講解定軸轉動，以及滑輪有質量的阿特伍德機。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。