詳細解答

STEP III 2012，第 8 題

純數學 • 斐波那契裂項級數

> **STEP III 2012，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

關鍵思路

第 (ii) 部分的式子每當 n 增加一，就會改變正負號，而第 (i) 部分正是在提示我們去尋找這種規律。一旦知道它在 n 為奇數時的值，第 (iii) 部分的反正切恆等式（identity）其實只是 $\tan(A-B)$ 公式換了個樣子。把這條恆等式重新整理，就能把級數（series）的每一項寫成兩個反正切的*差*，於是求和便可以伸縮相消（telescope）。

解答

首幾項為

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

第 (i) 部分

利用這些數值，

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

所以兩個式子相等，正如所求。

第 (ii) 部分

設 $G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$。第 (i) 部分說明 $G_0 = G_2$，這啟發我們比較 G_{n+1} 與 G_n。把遞推關係（recurrence）寫成 $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$ 的形式，得

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

其中第四行再次用了遞推關係 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$。

所以 G_n 每一步都改變正負號。由於第 (i) 部分給出 $G_0 = -1$，可得（對 n 用歸納法（induction））$G_n = (-1)^{n+1}$。兩種情況為

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & \text{若 } n \text{ 為偶數，} \\ 1 & \text{若 } n \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

例如，$n = 1$ 給出 $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$，而 $n = 4$ 給出 $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$。

第 (iii) 部分

固定 $r \geq 1$，並設

$$\alpha = \arctan \frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{F_{2r+1}}.$$

所有 $k \geq 1$ 的 F_k 都是正整數，所以這兩個量都有定義。由複角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

這裏用了 $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$。現在以奇數值 $n = 2r - 1$ 應用第 (ii) 部分：

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{所以} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

由於 $F_{2r-1} \geq 1$，它不為零，可以約去：

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

想一想 正切相等不一定代表角相等。為甚麼我們可以斷定 $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$？

由於 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應的（one-to-one），只需驗證兩個角都在這個區間內。這裏 $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$，因為 $1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$，所以 $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$。另外，按定義 $\arctan(1/F_{2r+2})$ 位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內。因此

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}} = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

這就是所求的恆等式。

求和。把恆等式重新整理，得

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan\frac{1}{F_{2r}} - \arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

所以部分和（partial sums）伸縮相消：

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan\frac{1}{F_4} - \arctan\frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan\frac{1}{F_{2N}} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

因為 $F_2 = 1$。當 $n \ge 2$ 時，有 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$，所以 $F_n \to \infty$。於是 $1/F_{2N+2} \to 0$，而由於 arctan 連續（continuous）且 $\arctan 0 = 0$，令 $N \to \infty$ 便得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

驗算

- $r = 1$：恆等式說 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$。這是經典的 $\frac{\pi}{4}$ 恆等式，因為右方的 tan 為 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)/\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1$。
- 首三項 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$，與 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{21} \approx 0.7378$ 吻合。
- 數值上，級數的 89 項給出 $0.785398163\ldots$，在機器精度內與 $\frac{\pi}{4}$ 一致。第 (ii) 部分的公式對每個 $n < 150$ 亦準確成立。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分用了第 (ii) 部分的偶數情況。那裏的下標是 $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$，所以 $n = 2r-1$ 是奇數，值為 $+1$。
- 由正切相等直接推出角相等，而沒有驗證兩個角都位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 內。
- 忘記伸縮求和後的首項：它是 $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$，而不是 $\arctan(1/F_1)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分與卡西尼 (Cassini) 恆等式 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ 是近親。兩者最好透過矩陣 (matrix) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 來理解：它的 n 次冪的元素正是斐波那契數 (Fibonacci numbers)，所以取行列式 (determinant) 便立即得到卡西尼恆等式。伸縮級數 (telescoping series)，以及由部分和過渡到極限時所需的謹慎，是大學第一個分析 (analysis) 課程的必備內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是閱讀這些內容的好起點，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）則有更多關於遞推關係的 STEP 風格練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。