詳細解答

STEP III 2012，第 7 題

純數學 • 耦合微分方程

STEP III 2012，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q7

關鍵思路

兩條耦合的一階方程（coupled first-order equations），只要消去一個變量，就會變成一條二階方程（second-order equation）：先對 $\dot{y}$ 的方程求導，再利用第一條方程本身，把 z 寫成 y 和 $\dot{y}$ 的式子。之後，每一部分都只是選取常數 A 和 B 而已。在第 (iii) 部分，無窮和是兩個幾何級數（geometric series），把結果與第 (ii) 部分對比，就能確定 c。從物理角度看，z_2 是每隔一個單位時間注射同一劑量後所達到的穩態（steady state）。

解答

通解

對 $\dot{y} = -2y + 2z$ 求導，再以第二條方程代入 $\dot{z}$，得

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

由第一條方程可把 z 用 y 表示：

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{所以} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

代入後得

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

輔助方程（auxiliary equation）$m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$ 的根為 $m = -1$ 和 $m = -6$，因此

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

其中 A 和 B 為任意常數。然後由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 得出 z：

$$z = Ae^{-t}(1 - \tfrac{1}{2}) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

此即所求。

> **想一想** 我們用了兩條方程來得出 y 的方程，但求 z 時只用了第一條。我們找到的這一對函數，真的滿足第二條方程嗎？

確實滿足。由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$，有 $\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$。另一方面，$-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$，兩者相同。所以方程組的每個解都具有這個形式，而每對具有這個形式的函數都是解。

第 (i) 部分

在 $t = 0$ 時，$y(0) = A + B$，$z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$。由條件得

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

所以 $A = 4B$，於是 $5B = 5$。因此 $B = 1$，$A = 4$：

$$y = 4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-6t}.$$

藥物起初在血液中，腦內的藥量由零開始上升，然後隨着被吸收而衰減。

第 (ii) 部分

設 $a = \frac{1}{2}A$ 及 $b = 2B$，使 $z = a\mathrm{e}^{-t} - b\mathrm{e}^{-6t}$。條件為

$$a - b = c, \qquad a\mathrm{e}^{-1} - b\mathrm{e}^{-6} = c.$$

以第一式減第二式，得 $a(1 - \mathrm{e}^{-1}) = b(1 - \mathrm{e}^{-6})$。把這個共同的值記作 k，於是

$$a = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-6}}, \qquad \text{及} \qquad c = a - b = kC,$$

其中

$$C = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-6}}.$$

由於 $\mathrm{e}^{-1} > \mathrm{e}^{-6}$，有 $1 - \mathrm{e}^{-1} < 1 - \mathrm{e}^{-6}$，所以 $C > 0$。特別地，$C \neq 0$，因此可以除以它：$k = c/C$。（等價地說，這兩條線性方程的行列式（determinant）為 $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-6} \neq 0$，所以解是唯一的。）因此

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{1 - \mathrm{e}^{-6}}\right),$$
$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} + \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{2(1 - \mathrm{e}^{-6})}\right),$$

其中 y_2 由 $A = 2a$ 及 $B = \frac{1}{2}b$ 得出。

第 (iii) 部分

設 $m = -n$，則 m 取遍 $0, 1, 2, \ldots$，且 $t - n = t + m$。利用第 (i) 部分，

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} (2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m).$$

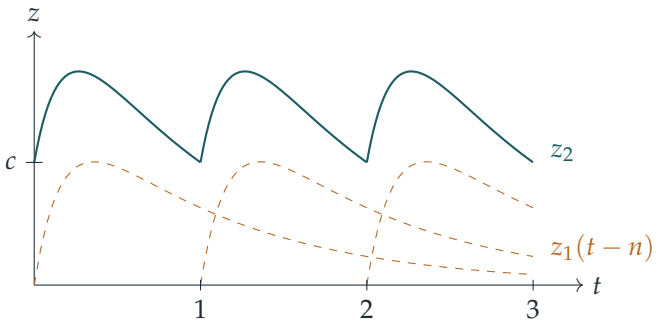
兩部分都是幾何級數，公比分別為 e^{-1} 和 e^{-6}，都嚴格介於 0 與 1 之間，所以兩者各自收斂（converge），可以分開求和：

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

這正好是 $z_2(t)$ 中括號內的式子乘以 2。所以該恆等式在 $0 \le t \le 1$ 上成立，當且僅當 $c/C = 2$，即

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

（若 c 取其他值，兩邊相差同一個非零函數的非零倍數，所以這個值是唯一的。）



這幅圖展示了其中的含義。在時間 n 向血液注射劑量 5，會產生腦內曲線 $z_1(t-n)$（虛線）。若從遙遠的過去開始，每個整數時間都注射一劑，腦內的藥量就是所有這些響應之和。這個和每隔一個單位時間重複一次（實線），而在 $[0,1]$ 上，它就是 c 取這個值時的 z_2。

驗算

- 在第 (i) 部分，$z_1(0) = 2 - 2 = 0$，$y(0) = 4 + 1 = 5$。
- 在第 (iii) 部分，$z_2(0)$ 和 $z_2(1)$ 都應等於 c。在求和式中，$t = 1$ 的級數就是 $t = 0$ 的級數去掉首項，而該項為 $z_1(0) = 0$。這樣不用任何代數運算就能確認 $z(0) = z(1)$。
- 當 $c = 2C$ 時，$y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$：每個週期內血液恰好損失一劑，而下一次注射正好補回。

- 數值上，$c \approx 1.15898$。在 $t = 0.37$ 處把 $z_1(t+m)$ 的 200 項相加，得 $1.967693\ldots$，與 $z_2(0.37)$ 吻合至小數點後 12 位。

常見錯誤

- 忘記 z 已經透過 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 由 y 決定，反而另外解一條 z 的方程，並引入新的、獨立的常數。
- 在第 (iii) 部分弄錯平移的方向：$n \le 0$ 意味着 $t - n \ge t$，所以只有過去的劑量才有貢獻。

STEP 之外

這是一個線性房室模型（linear compartment model），可寫成 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$，其中 M 是一個 2×2 矩陣。衰減率 1 和 6 是 M 的特徵值（eigenvalue）的相反數，這正是你會在大學一年級課程中遇到的、以矩陣指數（matrix exponential）看待線性系統的觀點。第 (iii) 部分是疊加原理（superposition）的一個簡單例子：對重複脈衝的響應，是同一個脈衝響應（impulse response）的多個平移副本之和。這個想法引向格林函數（Green's function）和卷積（convolution）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了線性方程組和脈衝響應。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。