詳細解答

STEP III 2012，第 6 題

純數學 • 複數根的軌跡

> **STEP III 2012，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

關鍵思路

一個複數（complex number）為零，當且僅當其實部（real part）與虛部（imaginary part）同時為零。因此，關於 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一條複數方程，會變成關於 x、y 和 p 的兩條實數方程。虛部方程總能因式分解（factorise）出因子 y，於是每個軌跡（locus）都分成「實根」和「非實根」兩部分。在每種情況下，我們先消去（eliminate）p，得到 (x, y) 平面上的一條曲線，然後檢驗該曲線上哪些點確實來自某個實數 p。

解答

第一條方程 $z^2 + pz + 1 = 0$

設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。則

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

由於 p 是實數，兩個括號分別是實部和虛部，兩者都必須為零：

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

此即所求。

由第二條方程，得 $p = -2x$ 或 $y = 0$。若 $y = 0$，第一條方程變為 $x^2 + px + 1 = 0$。此時 $x \neq 0$，因為 $x = 0$ 會得出 $1 = 0$，所以可以除以 x，得 $p = -(x^2 + 1)/x$。因此，要麼 $p = -2x$，要麼 $p = -(x^2 + 1)/x$ 且 $x \neq 0$（而在第二種情況下 $y = 0$）。

根的軌跡。情況 $p = -2x$。代入實部方程，得 $x^2 - y^2 - 2x^2 + 1 = 0$，即

$$x^2 + y^2 = 1.$$

反過來（converse），在單位圓（unit circle）上任取一點 $x+\mathrm{i}y$，並設 $p=-2x$，這是實數。則 $(2x+p)y=0$，且 $x^2-y^2+px+1=1-x^2-y^2=0$，所以該點是一個根。因此整個單位圓都在軌跡之內。

情況 $y=0$，$p=-(x^2+1)/x$。對每個實數 $x\neq 0$，這個 p 都是實數，而且 x 是 $x^2+px+1=0$ 的根。點 $x=0$ 永遠不是根，因為 $0^2+p\cdot 0+1=1$。

所以根的軌跡是去掉原點的實軸，連同單位圓 $|z|=1$。（點 ± 1 同時位於兩者之上。）

第二條方程 $pz^2+z+1=0$

設 $z=x+\mathrm{i}y$，由實部和虛部得

$$p(x^2-y^2)+x+1=0, \qquad (2px+1)y=0.$$

原點永遠不是根，因為 $z=0$ 會得出 $1=0$。

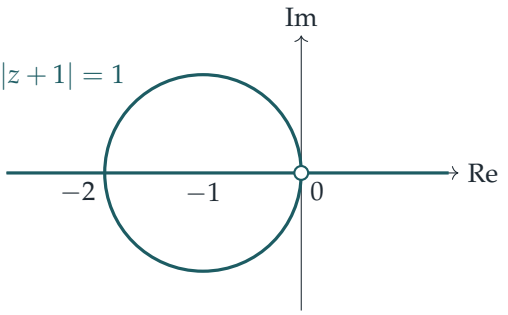
情況 $y=0$。此時 $px^2+x+1=0$ 且 $x\neq 0$，所以 $p=-(x+1)/x^2$。對每個實數 $x\neq 0$，這都是實數，所以實軸上除原點外的每一點都在軌跡之內。（當 $x=-1$ 時得 $p=0$，方程變成一次方程 $z+1=0$，其根的確是 -1。）

情況 $2px+1=0$。此時 $x\neq 0$ 且 $p=-1/(2x)$。代入實部方程並乘以 $-2x$：

$$(x^2-y^2)-2x^2-2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2+2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2+y^2=1.$$

反過來，對這個圓上除原點以外的任何一點，都有 $x\neq 0$，所以 $p=-1/(2x)$ 是實數，而把步驟倒推回去，便可證明兩條方程都成立。

所以根的軌跡是實軸連同圓 $|z+1|=1$（圓心 -1，半徑 1），但要去掉同時位於兩者之上的原點。



空心圓表示缺失的點 $z=0$。

想一想 為甚麼這個軌跡看起來像是把第一個軌跡「裏外翻轉」了？

若 z 是 $pz^2+z+1=0$ 的根，則 $w=1/z$ 滿足 $w^2+w+p=0$。映射 $z\mapsto 1/z$ 把實軸（不含 0）映到自身，又把直線 $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$（即 $w^2+w+p=0$ 的非實根所在之處）映到通過原點的圓 $|z+1|=1$。原點之所以缺失，是因為它對應於 $w=\infty$。

第三條方程 $pz^2+p^2z+2=0$

若 $p=0$，方程變為 $2=0$，沒有根，所以下文始終有 $p\neq 0$。由實部和虛部得

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0,\qquad p(2x+p)y=0,$$

由於 $p\neq 0$，第二條化為 $(2x+p)y=0$。

情況 $p=-2x$。由於 $p\neq 0$，故 $x\neq 0$。代入得

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0\quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

反過來，這條曲線上任何一點都有 $x\neq 0$，所以 $p=-2x$ 是非零實數，而把步驟倒推回去，便可證明該點是一個根。由於 $x^2+y^2>0$，曲線上 $x<0$。把它寫成

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

我們需要 $-1/x\geq x^2$；乘以 $x<0$ 會令不等式（inequality）反向，得 $-1\leq x^3$，所以 $-1\leq x<0$。曲線通過 -1（該處 $y=0$），關於實軸對稱，而且當 $x\to 0^-$ 時 $y^2\to\infty$，所以虛軸是一條漸近線（asymptote）。此外，對 $x<0$ 有 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$，所以當 x 由 -1 增至 0 時，$|y|$ 一直遞增。以極坐標形式（polar form）表示，曲線為 $r^3\cos\theta=-1$。

情況 $y=0$。此時，實數 x 在軌跡之內，當且僅當存在實數 p 使 $xp^2+x^2p+2=0$。當 $x=0$ 時，這就是 $2=0$，所以 0 不在軌跡之內。當 $x\neq 0$ 時，這是關於 p 的二次方程，它有實數解當且僅當其判別式（discriminant）非負：

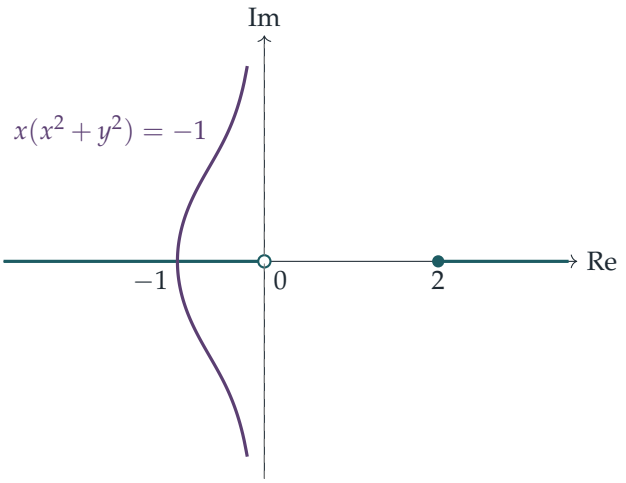
$$x^4-8x=x(x^3-8)\geq 0.$$

當 $x<0$（兩個因子皆為負）或 $x\geq 2$（兩個因子皆非負）時成立，而當 $0<x<2$ 時不成立。以這種方法求得的任何實數 p 必然非零，因為 $p=0$ 會得出 $2=0$。例如 $x=2$ 需要 $2p^2+4p+2=0$，故 $p=-1$，而確實有 $-z^2+z+2=-(z-2)(z+1)$。

? **想一想** 為甚麼這裏要解出 p，而不是解出 x？

我們想知道哪些點 x 可以達到，所以 x 是已知的，而 p 才是未知數。這條方程是關於 p 的二次方程，而存在實根恰好就是關於 x 的判別式條件。

所以根的軌跡是負實軸、實軸上的射線 $x\geq 2$，以及曲線 $x(x^2+y^2)=-1$；這條曲線從 -1 出發，向上下兩個方向伸展，趨近虛軸。



曲線只在 -1 處與實軸相交，該處的切線是鉛垂的；當 $|y|\to\infty$ 時，曲線趨近虛軸。

驗算

- 對於 $z^2+pz+1=0$，兩根之積為 1，所以非實根是一對共軛（conjugate）複數 $z,\bar{z}$，且 $|z|^2=1$：再次得到單位圓。
- 在第三條方程中，$p=-1$ 給出根 2 和 -1，分別是射線的端點和曲線的頂點。取 $p=1$ 得 $z^2+z+2=0$，其根為 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$，而 $x(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$，正如所料。
- 在數值上，我們以 10^5 個隨機 p 值求解全部三條方程，確認每個根都位於所述的軌跡上。我們亦確認了各軌跡上的隨機點都能以所述的 p 達到；而對 p 作精細掃描後，並未發現第三條方程在 $(0,2)$ 內有任何實根，最小的正實根是 2.0。

常見錯誤

- 忘記檢驗反方向：消去 p 只得到一條包含軌跡的曲線，你仍須證明每一點都能由某個實數 p 達到。在第三條方程中，$(0,2)$ 內的實數點雖然滿足 $y=0$，卻永遠不能達到。
- 除以 x 或 p 時沒有說明它為何非零。缺失的原點正是由此而來。
- 草率處理 $p=0$：在第二條方程中它給出真正的根 -1，但在第三條方程中它完全沒有根。

STEP 之外

根軌跡（root locus）是控制工程（control engineering）中的標準工具：當增益（gain）參數改變時，系統的極點（poles）沿着曲線移動，而系統的穩定性（stability）取決於這些極點會否越過進入右半平面（right half-plane）。這道題亦暗示了映射 $z \mapsto 1/z$ 的幾何性質：它把直線和圓映成直線和圓。這正是莫比烏斯變換（Möbius transformations）理論的開端，Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對此有精彩的圖解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。