詳細解答

STEP III 2012，第 5 題

純數學 • 圓錐曲線上的有理點

> **STEP III 2012，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q5

關鍵思路

(i)(b) 中的恆等式（identity）其實是一個經過偽裝的旋轉（rotation）：點 $(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)$ 正是把點 $(1, -\sqrt{m})$ 旋轉角度 θ 後所得的點，因此它仍然位於半徑為 $\sqrt{1+m}$ 的圓上。若 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是有理數（例如 (i)(a) 中得到的 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$），這個旋轉就會把一個「好」點變成另一個「好」點。第 (ii) 部分的所有內容都是同一個技巧，只是從一個合適的整數點出發；至於雙曲線（hyperbola），我們則把旋轉換成它的雙曲版本。

解答

第 (i) 部分

(a) 點 $(1,0)$ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一個整數有理點（integer rational point）。要找非整數的有理點，我們利用 $3,4,5$ 三角形：$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$，所以 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 符合要求，而且兩個坐標都不是整數。

(b) 點 $(1,1)$ 是 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一個整數有理點。

展開後，交叉項（cross terms）為 $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ 和 $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$，兩者互相抵消，所以

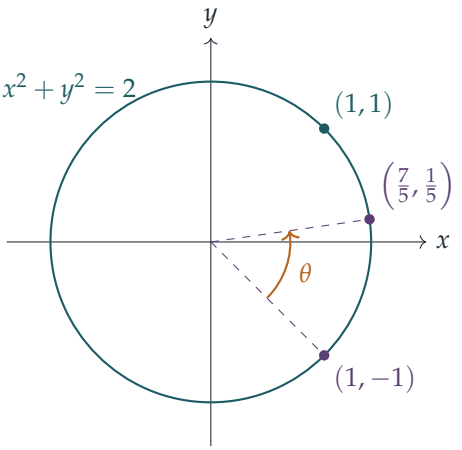
$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta)^2 + (\sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta + m\sin^2\theta + \sin^2\theta + m\cos^2\theta \\ &= (1+m)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + m.\end{aligned}$$

取 $m = 1$，使右方等於 2，並選取 θ 使 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$（這是可行的，因為 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

位於單位圓（unit circle）上）。於是

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

滿足 $x^2 + y^2 = 2$；事實上 $\frac{49+1}{25} = 2$。所以 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 是 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一個非整數有理點。



上圖顯示了箇中過程：把 $(1, -1)$ 沿逆時針方向旋轉 θ（其中 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$），便落在 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 上。

第 (ii) 部分

(a) 由於 $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$，點 $(1, \sqrt{2})$，即 $p = 1$、$q = 0$、$r = 0$、$s = 1$，是 $x^2 + y^2 = 3$ 上的一個整數 2-有理點。

要找非整數的點，就用 (i)(b) 的恆等式，取 $m = 2$ 使 $1 + m = 3$，並再次取 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$：

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

這裏 $p = \frac{3}{5}$、$q = \frac{4}{5}$、$r = \frac{4}{5}$、$s = -\frac{3}{5}$，全都不是整數，而由恆等式可知 $x^2 + y^2 = 3$。直接驗證：$x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$，$y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$，兩者相加得 $\frac{75}{25} = 3$。

> **想一想** 恆等式只給出 $1 + m$，而 m 又必須與 $\sqrt{2}$ 有關，那麼我們怎樣才能得到 11？

把起點放大。恆等式源自旋轉 $(1, -\sqrt{m})$；我們同樣可以旋轉任何點 $(a, -b\sqrt{2})$。交叉項同樣會抵消，得到

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

所以我們需要滿足 $a^2+2b^2=11$ 的整數，而 $a=3$、$b=1$ 正好可行（$9+2=11$）。換句話說，我們從 $x^2+y^2=11$ 上的整數 2-有理點 $(3,\sqrt{2})$ 出發。

(b) 取 $a=3$、$b=1$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$、$\sin\theta=\frac{4}{5}$：

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

所以 $p=\frac{9}{5}$、$q=\frac{4}{5}$、$r=\frac{12}{5}$、$s=-\frac{3}{5}$，全都不是整數，且 $x^2+y^2=11$。直接驗證：$x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$，$y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$，兩者相加得 $\frac{275}{25}=11$。

(c) 對於雙曲線，我們需要一個保持 x^2-y^2 而非 x^2+y^2 不變的「旋轉」。若 $c^2-s^2=1$（可以想像 $c=\cosh t$、$s=\sinh t$），則

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2&=a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\&=(a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

因為交叉項 $2\sqrt{2}\,abcs$ 再次互相抵消。我們需要 $a^2-2b^2=7$：取 $a=3$、$b=1$（所以 $(3,\sqrt{2})$ 是雙曲線上的一個整數 2-有理點）。

接着我們需要有理數 c、s 使 $c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$。選取 $c+s=2$ 及 $c-s=\frac{1}{2}$，得 $c=\frac{5}{4}$、$s=\frac{3}{4}$。於是

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

其中 $p=\frac{15}{4}$、$q=\frac{3}{4}$、$r=\frac{9}{4}$、$s=\frac{5}{4}$，全都不是整數。直接驗證：$x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$，$y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$，所以 $x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$。這就是 $x^2-y^2=7$ 上的一個非整數 2-有理點。

驗算

每一個點都可以像上文那樣用分數準確驗證，也可以用數值驗證：對於 (ii)(c)，$x\approx 4.81066$、$y\approx 4.01777$，得 $x^2-y^2\approx 7.0000$；對於 (ii)(b)，$x\approx 2.93137$、$y\approx 1.55147$，得 $x^2+y^2\approx 11.0000$。最後務必逐一檢查 p,q,r,s，確認沒有一個是整數。

常見錯誤

- 忘記 0 是整數：像 $\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\ldots\right)$ 這樣的點有 $p=0$，所以它不是非整數 2-有理點。
- 在 (c) 中，一個看似無害的選擇也可能失敗：$c=\frac{5}{3}$、$s=\frac{4}{3}$ 同樣滿足 $c^2-s^2=1$，但會得出 $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{2}$，其中 $p=5$ 是整數。每個係數都要檢查。

STEP 之外

形如 $p + q\sqrt{2}$ 的數構成一個域（field）$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，而這道題其實是在該域上尋找圓錐曲線（conic）上的點。把已知點旋轉一個有理角度的技巧，是一套優美理論的起點：只要一條圓錐曲線上有一個有理點，經過該點的直線便能把其餘所有有理點參數化（parametrise）；而 $x^2 - 2y^2 = 1$（佩爾方程（Pell's equation））上的有理點，在 (c) 所用的那種雙曲「旋轉」之下正好構成一個羣（group）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）講述了佩爾方程與平方和，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則介紹了像 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 這樣的域。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。