詳細解答

STEP III 2012，第 4 題

純數學 • 無窮級數求和

STEP III 2012，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q4

關鍵思路

一切都建基於兩個標準級數（series）：$\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$ 及 $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$。在第 (i) 部分，竅門是把每個關於 n 的多項式（polynomial）改寫成能與 $n!$ 相消的形式，即使用 $n(n-1)$ 和 $n(n-1)(n-2)$ 這類乘積，而不是 n 的冪。在第 (ii) 部分，部分分式（partial fractions）把那個棘手的有理因子拆成 $1/(n+k)$ 形式的若干項，而每一項都是一個平移了的對數級數。

解答

第 (i) 部分

兩個事實便足以完成所有工作。第一，$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

第二，對任何整數 $k \geq 1$，當 $n < k$ 時，項 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$ 等於零；當 $n \geq k$ 時，它等於 $1/(n-k)!$。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

這裏所有級數都絕對收斂（absolutely converge）（每一個都是關於 n 的多項式除以 $n!$），因此我們可以隨意把它們拆開再重新組合。

第一個和。 由於 $n+1=n+1$，利用 $(*)$ 並取 $k=1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=2\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第二個和。 我們寫成 $(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。於是由 $(*)$ 取 $k=2$ 及 $k=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第三個和。

? **想一想** 怎樣把 $(2n-1)^3$ 化成下降乘積 $n(n-1)(n-2)$、$n(n-1)$、n？

展開得 $(2n-1)^3=8n^3-12n^2+6n-1$。接着我們利用

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,\qquad n^2=n(n-1)+n.$$

你可以展開右邊來驗證，或者代入 $n=0,1,2,3$ 檢查。代入後，

$$\begin{aligned}(2n-1)^3&=8[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n]-12[n(n-1)+n]+6n-1\\&=8\,n(n-1)(n-2)+12\,n(n-1)+2n-1.\end{aligned}$$

（快速驗證：當 $n=1$ 時兩邊都是 1，當 $n=2$ 時兩邊都是 27。）現在由 $(*)$ 取 $k=3,2,1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n!}=8\mathrm{e}+12\mathrm{e}+2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=21\mathrm{e}+1.$$

第 (ii) 部分

部分分式。 分子與分母的次數相同，所以先做除法：

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

設 $\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n+1}+\dfrac{B}{n+2}$，利用遮蓋法（cover-up rule）得 $A=\dfrac{-2}{1}=-2$（取 $n=-1$）及 $B=\dfrac{-5}{-1}=5$（取 $n=-2$）。因此

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}.$$

三個部分。 我們令 $x=\frac{1}{2}$，並利用對於 $|x|<1$ 成立的 $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$。下面三個級數各自收斂（各項縮小的速度至少與 2^{-n} 一樣快），所以把和拆開是合理的。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4(\ln 2-\tfrac{1}{2}) = 4\ln 2-2.$$

在第二行和第三行中，我們分別令 $m=n+1$ 及 $m=n+2$。第三行是完整的對數級數減去其 $m=1$ 項，即 x。

? **想一想** 為甚麼第三部分需要額外的 $-x$？

平移 $m=n+2$ 令求和由 $m=2$ 開始，所以這個級數是缺了首項的 $-\ln(1-x)$。忘記這一點是這裏最容易出錯的地方。

合併。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2) = 12-16\ln 2.$$

驗算

- 計算至 $n=60$ 的部分和（partial sums），(i) 中三個和分別得 4.436564、12.591409 及 58.083918。它們在機器精度內與 $2e-1$、$5e-1$ 及 $21e+1$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$12-16\ln 2\approx 0.909645$，與部分和一致。首幾項是 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{48}$、$\frac{1}{16}$，所以總和略小於 1 是合理的。
- (ii) 的答案必須是正數，而它的確是：$16\ln 2\approx 11.09<12$。

常見錯誤

- 使用 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$，忘記了缺少 $n=0$ 這一項。
- 把 $\sum n^2/n!$ 寫成 $\sum n/(n-1)!$ 便停下來。你仍須拆開 $n=(n-1)+1$。
- 在 (ii) 中，為 $\sum x^n/(n+2)$ 平移指標時漏掉了 $-x$。

STEP 之外

下降乘積 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 稱為下降階乘（falling factorials），而用它們來表示多項式就要用到第二類斯特林數（Stirling numbers of the second kind）。$(*)$ 中的和表明，平均值為 1 的泊松分佈（Poisson distribution）的第 k 階階乘矩（factorial moment）等於 1。正因如此，例如 $\sum n^k/n!$ 等於 e 乘以第 k 個貝爾數（Bell number）。這裏的重新排列之所以合理，是基於絕對收斂，這是大學一年級分析（analysis）的一個重要主題：參見 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。至於概率方面，參見 Blitzstein 與 Hwang，*Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。