詳細解答

STEP III 2012，第 3 題

純數學 • 相切曲線與四次方程

STEP III 2012，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q3

關鍵思路

把 $y = 4 - x^2$ 代入第二條方程，得到一條關於 x 的四次方程（quartic），它的根就是兩曲線交點的 x 坐標。「相切」即是有一個重根（repeated root）。與其把 m 和 k 當作未知數，不如用切點的 x 坐標 a 來標記一切：這樣 m、k 以及其餘所有交點，結果都是 a 的簡單函數。由此可以準確知道四幅草圖各自的樣子，而第 (ii) 部分就是 $m = 12$ 的特殊情況。

解答

準備工作：兩曲線可在哪裏相切？

把兩條曲線記作 $C_1\colon y = 4 - x^2$ 和 $C_2\colon mx = k - y^2$。C_1 是大家熟悉的開口向下的拋物線（parabola），經過 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$。C_2 即 $x = (k - y^2)/m$：這是一條關於 x 軸對稱、開口向左（因為 $m > 0$）的拋物線，頂點（vertex）為 $(k/m, 0)$。當 $k > 0$ 時，它與 y 軸相交於 $(0, \pm\sqrt{k})$；當 $k < 0$ 時，它與 y 軸完全不相交。

C_1 上每一點都是 $(x, 4 - x^2)$，因此它在 C_2 上當且僅當

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

因為 $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$。

? **想一想** 為甚麼「相切」意味着 F 有重根？

在公共點上，C_1 的方向為 $(1, -2x)$，而 C_2（即 $mx + y^2$ 的等值曲線（level curve））的法向量（normal）為 $(m, 2y)$。當方向與法向量垂直時，兩曲線相切：$m - 4xy = 0$，即 $m - 4x(4 - x^2) = 0$。而 $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$ 正好就是這個式子。所以兩曲線在 $x = a$

相切，當且僅當 $F(a) = F'(a) = 0$，即重根。

由 $F'(a) = 0$ 得 $m = 4a(4 - a^2)$。代入 $F(a) = 0$，

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

因此

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

由於 $m > 0$，我們需要 $0 < a < 2$ 或 $a < -2$。把二重因式除去，

$$F(x) = (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8),$$

這可以展開驗證：x^3 項互相抵消，x^2 的係數是 $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$，$x$ 的係數是 $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$，常數項是 $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$。這個二次因式的判別式（discriminant）為 $8(4 - a^2)$，所以只有當 $0 < a < 2$ 時才有其他交點，它們位於

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

現在可以按 a 把四種情況分類：

- $k < 0$ 當且僅當 $a^2 > 4$，故 $a < -2$。
- 當 $0 < a < 2$ 時，$k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$，故 $k > 16$ 當且僅當 $a < \sqrt{8/3}$。
- 當 $0 < a < 2$ 時，$\frac{k}{m} < 2$ 當且僅當 $3a^2 - 8a + 4 < 0$，即 $(3a - 2)(a - 2) < 0$，即 $a > \frac{2}{3}$。

所以 (a) 對應 $a < -2$，(c) 對應 $0 < a < \frac{2}{3}$，(d) 對應 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$，(b) 對應 $\sqrt{8/3} < a < 2$。（沒有任何相切的情形同時滿足 $0 < k < 16$ 和 $k/m > 2$，這就是題目沒有列出這種情況的原因。）

第 (i) 部分

在每種情況下，C_1 與坐標軸的交點都是 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$；C_2 與坐標軸的交點是 $(k/m, 0)$，當 $k > 0$ 時還有 $(0, \pm\sqrt{k})$。

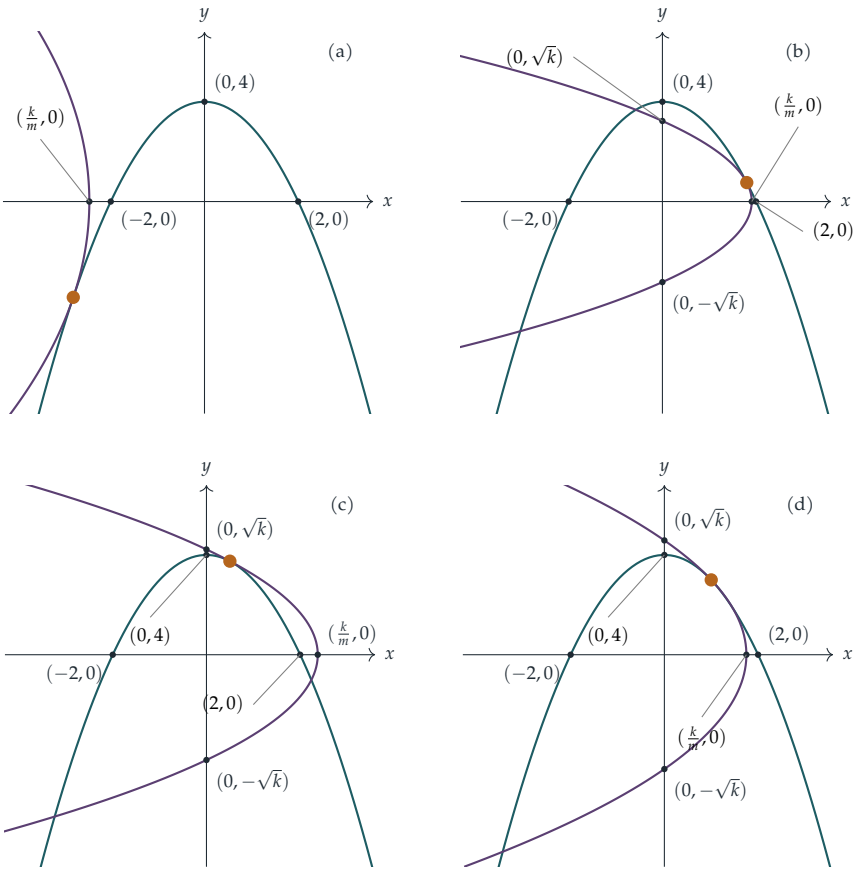
(a) 這裏 $a < -2$，所以兩曲線在第三象限（quadrant）的 $(a, 4 - a^2)$ 相切，而且在其他地方沒有交點。頂點位於 $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$，它小於 -2，因為 $(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$。所以 C_2 整條位於 $(-2, 0)$ 的左方，它的下半支貼靠在 C_1 的左支上。

(b) 現在 $\sqrt{8/3} < a < 2$，所以切點在第一象限，靠近 $(2, 0)$。頂點滿足 $\sqrt{3} \le k/m < 2$（由算術–幾何平均不等式（AM–GM），$3a^2 + 4 \ge 4\sqrt{3}\,a$），而且 $\sqrt{k} < 4$，所以 C_2 的頂點和兩個 y 截距都位於 C_1 之下。上半支從下方與 C_1 相切，然後在 x_+ 與它相交，其中 $-2 < x_+ < 0$（第二象限中的一點）。下半支在 $x_- < -2$ 與 C_1 相交，位於第三象限。

(c) 這裏 $0 < a < \frac{2}{3}$。頂點在 $(2,0)$ 的右方，而且 $\sqrt{k} > 4$，所以 C_2 繞過 C_1 的頂部，在第一象限從外側與它相切。此外 $x_+ > 2$，因為 $\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$，而 $x_- < -2$。所以下半支在第四象限與 C_1 相交，在第三象限再相交一次。

(d) 這裏 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$。頂點在 0 與 2 之間，位於 C_1 之下，但 $\sqrt{k} > 4$，所以上半支從 $(0,4)$ 上方經過。它在第一象限與 C_1 相切，並且也在第一象限於 $x_+ \in (0,2)$ 與它相交（因為 $x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$）。下半支在 $x_- < -2$ 相交。

對 $0 < a < 2$，每種情況都有 $x_- < -2$，因為 $a + \sqrt{8-2a^2} > 2$（把 $\sqrt{8-2a^2} > 2-a$ 兩邊平方即可）。各草圖分別取 $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$。C_1 為青色，C_2 為梅紫色，切點為琥珀色。



第 (ii) 部分

當 $m = 12$ 時，把 $y = 4 - x^2$ 代入 $12x = k - y^2$，得 $12x = k - 16 + 8x^2 - x^4$，即

$$x^4 - 8x^2 + 12x + 16 - k = 0,$$

正如所求。

在切點 $x = a$，這條四次方程有重根（見上面的方框），所以它的導數在該處也等於零：

$$4a^3 - 16a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - 4a + 3 = 0.$$

由於 $a = 1$ 是一個根，$a^3 - 4a + 3 = (a-1)(a^2 + a - 3)$，因此

$$a = 1 \qquad \text{或} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

為求 k，在四次方程中代入 $x = a$，並利用 $a^3 = 4a - 3$ 化簡，從而 $a^4 = 4a^2 - 3a$：

$$k = a^4 - 8a^2 + 12a + 16 = (4a^2 - 3a) - 8a^2 + 12a + 16 = -4a^2 + 9a + 16.$$

現在逐一看三種情況：

- $a = 1$：$k = 21$，所以 $k > 16$ 且 $k/m = \frac{7}{4} < 2$。這是情況 **(d)**。
- $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \approx 1.303$：這裏 $a^2 = 3 - a$，所以 $k = -4(3-a) + 9a + 16 = 13a + 4 = \frac{1}{2}(13\sqrt{13} - 5) \approx 20.94$。它大於 16，因為 $13\sqrt{13} > 37$（平方：$2197 > 1369$）；它小於 24，因為 $13\sqrt{13} < 53$（$2197 < 2809$）。所以 $k > 16$ 且 $k/m < 2$，又是情況 **(d)**。
- $a = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}) \approx -2.303$：$k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5 + 13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$。這是情況 **(a)**。

所以只會出現草圖 (a) 和 (d)。這與上面按 a 所作的分類一致：1 和 1.303 位於 $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$ 之內，而 $-2.303 < -2$。注意 $a^3 - 4a + 3 = 0$ 其實就是 $m = 4a(4 - a^2)$ 取 $m = 12$ 的情形。

兩幅 (d) 圖略有不同。對 $a = 1$，其他交點為 $x = -1 \pm \sqrt{6}$；在 $x \approx 1.45$ 的交點位於切點的*右方*，上半支從上方與 C_1 相切（如草圖所示）。對 $a \approx 1.303$，交點在 $x \approx 0.84$，位於切點左方，上半支從下方相切。

驗算

- 當 $m = 12$、$k = 21$ 時，四次式可因式分解為 $(x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$。展開得 $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$，正是 $16 - k = -5$ 時的四次式。
- 在 $(1, 3)$，C_1 的斜率為 -2；對 $12x = 21 - y^2$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$。所以兩曲線確實在該處相切。
- 數值上，對 $(0, 2)$ 內及 $a < -2$ 的隨機 a，公式 $m = 4a(4 - a^2)$ 和 $k = (4 - a^2)(3a^2 + 4)$ 均令 $F(a)$ 和 $F'(a)$ 等於零，而各情況的分界正好落在 $a = \frac{2}{3}$ 和 $a = \sqrt{8/3}$。對 $a \approx 1.3028$，求根程序找到其他交點位於 $x \approx 0.8433$ 和 $x \approx -3.4488$，與 $x_\pm$ 的預測相符。

常見錯誤

- 要求四次方程只有一個根。「恰好相切一次」並不排除其他交點：在 $m = 12$ 的情況 (d) 中就有兩個。
- 把 C_2 畫成開口向右。當 $m > 0$ 時，$x = (k - y^2)/m$ 隨 $|y|$ 增大而減小。
- 在 (a) 中，忘記 C_2 沒有 y 截距，或把它的頂點放在 -2 與 0 之間。頂點必須在 -2 的左方。

STEP 之外

用切點 a 來標記各種構形，讓我們初步窺見判別式和包絡線（envelope）。使 F 有重根的 (m, k) 所組成的集合，就是曲線 $\big(4a(4 - a^2),\ (4 - a^2)(3a^2 + 4)\big)$；穿越這條曲線時，實交點的數目會改變二。這是平面曲線的代數幾何（algebraic geometry）的起點，也是奇點理論（singularity theory，又稱「突變理論」（catastrophe theory））的起點，後者用來研究解如何隨參數變化。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了許多同類風格、STEP 式的曲線題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。