詳細解答

STEP III 2012，第 2 題

純數學 • 無窮乘積與級數

> **STEP III 2012，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q2

關鍵思路

第 (i) 部分的乘積可以利用平方差(difference of two squares)逐個括號地合併，因此會像伸縮（telescoping）一樣化簡成非常簡單的式子。把 $\frac{1}{1-x}$ 寫成無窮乘積（infinite product）之後，取對數（logarithm）就把乘積變成和，再把這個和逐項微分（differentiate term by term），便得到分式組成的級數（series）。第 (ii) 部分是同一技巧的變奏：$1+x+x^2$ 是兩個 $1-t$ 形式的式子之商，所以第 (i) 部分的結果可以分別應用到兩者身上。

解答

全文假設 $|x|<1$，而且按題目所允許，我們不理會收斂（convergence）的問題。

第 (i) 部分

從左邊開始合併括號，每次都用 $(1-a)(1+a)=1-a^2$：

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

如此類推。每一步都令冪次加倍，而最後一個括號 $1+x^{2^n}$ 把 $1-x^{2^n}$ 變成 $1-x^{2^{n+1}}$。所以

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

由於 $x\neq 1$，我們可以除以 $1-x$：

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

移項後即得題目所要求的 $\frac{1}{1-x}$ 的表達式。

現在令 $n \to \infty$。因為 $|x| < 1$，所以 $x^{2^{n+1}} \to 0$，餘項消失，於是

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1 + x^{2^r}).$$

每個因子都是正數（因為 $x^{2^r} > -1$），$1 - x$ 亦然，所以可以取對數。乘積的對數等於各對數之和：

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + x^{2^r}),$$

兩邊乘以 -1 即得所求結果。

想一想 怎樣由對數之和得到分式之和？

兩邊對 x 求導。根據連鎖法則（chain rule），$\ln(1 + x^{2^r})$ 的導數（derivative）是

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1 + x^{2^r}}.$$

左邊則有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x}$。逐項微分（這正是題目叫我們不必理會的收斂問題）得

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r x^{2^r-1}}{1 + x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

其中列出的是 $r = 0, 1, 2$ 的項。這就是所要求的級數。

第 (ii) 部分

左邊是 $\ln(1 + x + x^2)$ 的導數，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + x^2) = 1 + 2x$。因此我們要為 $1 + x + x^2$ 找一個對數和的表達式，而因式分解 $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$ 正好提供了一個：

$$\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x).$$

由於 $|x^3| < 1$ 同樣成立，第 (i) 部分的對數結果在以 x^3 代替 x 後仍然成立。記 $y_r = x^{2^r}$，使得 $(x^3)^{2^r} = y_r^3$，則

$$\ln(1 + x + x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + y_r^3) + \sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 + y_r) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln \frac{1 + y_r^3}{1 + y_r}.$$

立方和（sum of cubes）可分解為 $1 + y^3 = (1 + y)(1 - y + y^2)$，所以每個分式都等於 $1 - y_r + y_r^2$，從而

$$\ln(1 + x + x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty} \ln(1 - x^{2^r} + x^{2^{r+1}}).$$

（每個 $1 - y + y^2 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 都是正數，所以這些對數都有意義。）

想一想 求導時，負號到哪裏去了？

連鎖法則給出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}) = \frac{-2^r x^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}} = -\frac{2^r x^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

而這個負號正好抵消和式前面的負號。兩邊逐項微分，得

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

首三項為

$$\begin{aligned} r=0: &\quad \frac{1-2x}{1-x+x^2},\\ r=1: &\quad \frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4} = \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\ r=2: &\quad \frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8} = \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8}, \end{aligned}$$

這正是題目要我們證明的級數。

另一途徑。恆等式 $(1+y+y^2)(1-y+y^2) = 1+y^2+y^4$ 直接為 $1+x+x^2$ 提供一個伸縮乘積，就像第 (i) 部分那個一樣：$1+x+x^2 = (1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}})/\prod_{r=0}^{n}(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})$，而分子趨向 1。

驗算

- 代入 $x=0$：每條級數的兩邊都等於 1。
- 當 $x=\frac{1}{2}$ 時，第 (ii) 部分的左邊是 $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$。右邊首四項之和為 1.142369，而由於冪 x^{2^r} 縮小得極快，誤差也縮小得極快。
- 我們用分數精確驗證了伸縮後的乘積，並取 30 項，在 $(-0.95, 0.95)$ 內隨機抽取 1000 個 x，以數值方法驗證了兩條級數及各對數恆等式。

常見錯誤

- 用連鎖法則時漏掉因子：x^{2^r} 的導數是 $2^r x^{2^r-1}$，而不是 $2^r x^{2^r}$。
- 第 (ii) 部分的整體符號弄錯：$1-y+y^2$ 的導數是 $-1+2y$，正是這個負號抵消了和式前面的負號。

STEP 之外

乘積 $\prod(1+x^{2^r})$ 表明每個正整數都可以唯一地寫成若干個不同的 2 的冪之和，這就是以生成函數（generating function）表達的二進制（binary）記數法。「不理會收斂」其實掩蓋了一些真正的問題：甚麼時候可以對無窮乘積取對數？甚麼時候可以把級數逐項微分？大學第一個分析（analysis）課程會用一致收斂（uniform convergence）來回答這些問題，而在 $|x| \leq c < 1$ 上，這裏的一切都是一致收斂的。清晰的講解可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。