詳細解答

STEP III 2012，第 13 題

概率與統計 • 截尾正態分佈

STEP III 2012，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q13

關鍵思路

在某區間上的條件期望（conditional expectation），就是 $z\,f(z)$ 在該區間上的積分，再除以該區間的概率。對標準正態分佈（standard Normal）而言，$z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 恰好是 $-\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 的導數，因此這個積分可以精確求出。其餘的工作只是標準化（standardising），即 $X = \mu + \sigma Z$，以及按 X 的正負號把 $|X|$ 拆開處理。

解答

全文以 $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 表示 Z 的概率密度函數（probability density function），於是 $\Phi'(z) = \phi(z)$ 及 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$。

第 (i) 部分

在 $a < Z < b$ 的條件下，Z 的條件密度在 (a, b) 上為 $\phi(z)/\mathrm{P}(a < Z < b)$，而 $\mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$。因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z \mid a < Z < b) &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\Phi(b) - \Phi(a))} \Big[-\mathrm{e}^{-z^2/2} \Big]_a^b \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(\Phi(b) - \Phi(a))},
\end{aligned}$$

因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\mathrm{e}^{-z^2/2}\right) = z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$。這就是所求的結果。由於該積分收斂（converges），當 $b = \infty$（或 $a = -\infty$）時結果同樣成立，只需把 $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$ 及 $\Phi(\infty) = 1$ 代入理解即可。

第 (ii) 部分

設 $X = \mu + \sigma Z$，其中 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ 且 $\sigma > 0$。由於 $\sigma > 0$，

$$X > 0 \iff Z > -\mu/\sigma,$$

所以以 $X > 0$ 為條件，等同於以 $Z > -\mu/\sigma$ 為條件。期望在條件下同樣是線性（linear）的，故

$$\mathrm{E}(X \mid X > 0) = \mathrm{E}(\mu + \sigma Z \mid Z > -\mu/\sigma) = \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z \mid Z > -\mu/\sigma),$$

此即所求。

$|X|$ 的平均值。令 $c = \mu/\sigma$。在第 (i) 部分中取 $a = -c$ 及 $b = \infty$，得

$$\mathrm{E}(Z \mid Z > -c) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(1 - \Phi(-c))} = \frac{\phi(c)}{p}, \qquad \text{其中} p = \mathrm{P}(X > 0) = 1 - \Phi(-c).$$

把上一條式子乘以 p，得

$$\mathrm{E}(X;\, X > 0) := \mathrm{E}(X \mid X > 0)\,\mathrm{P}(X > 0) = \mu p + \sigma\phi(c).$$

? **想一想** 怎樣才能不再計算第二個積分，就得到 $X < 0$ 部分的貢獻？

兩部分加起來就是整個平均值：$\mathrm{E}(X;\, X > 0) + \mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mathrm{E}(X) = \mu$（事件 $X = 0$ 的概率為 0）。所以 $\mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mu - \mu p - \sigma\phi(c)$。在 $X < 0$ 時有 $|X| = -X$，因此

$$\begin{aligned} m = \mathrm{E}|X| &= \mathrm{E}(X;\, X > 0) - \mathrm{E}(X;\, X < 0) \\ &= 2(\mu p + \sigma\phi(c)) - \mu \\ &= \mu(2p - 1) + 2\sigma\phi(c). \end{aligned}$$

最後，$2p - 1 = 1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)$ 及 $2\phi(c) = \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{e}^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$，得

$$m = \mu(1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)) + \sigma\sqrt{2/\pi}\,\exp(-\tfrac{1}{2}\mu^2/\sigma^2),$$

此即所求。

$|X|$ 的方差。關鍵在於 $|X|^2 = X^2$，所以二階矩（second moment）無須另作計算：

$$\mathrm{E}(|X|^2) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}X)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

因此

$$\mathrm{Var}|X| = \mu^2 + \sigma^2 - m^2.$$

驗算

- 若 $\mu = 0$，則 $|X|$ 服從半正態分佈（half-Normal），公式給出 $m = \sigma\sqrt{2/\pi}$，正是熟悉的數值；此時方差為 $\sigma^2(1 - 2/\pi)$，是正數。
- 若 $\mu \gg \sigma$，則 X 幾乎總是正數，$\Phi(-\mu/\sigma) \approx 0$，而指數項極小，所以 $m \approx \mu$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx \sigma^2$，與預期相符。
- 把 μ 換成 $-\mu$ 時，m 的公式不變（利用 $1 - 2\Phi(-c) = -(1 - 2\Phi(c))$），與對稱性 $|X| \sim |-X|$ 吻合。
- 數值上，取 $\mu = 1$、$\sigma = 2$，得 $m \approx 1.7912$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx 1.7917$，與直接數值積分（quadrature）以及 2×10^5 個數值的模擬（simulation）結果一致。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記除以 $\Phi(b) - \Phi(a)$：單是積分本身只是 $\mathrm{E}(Z;\, a < Z < b)$，並非條件期望。
- 寫成 $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}(X \mid X > 0)$：條件期望必須分別以 $\mathrm{P}(X > 0)$ 及 $\mathrm{P}(X < 0)$ 加權。
- 用另一個積分去計算 $\mathrm{E}(X^2)$，其實 $|X|^2 = X^2$ 即可直接得出。

STEP 之外

$|X|$ 的分佈稱為摺疊正態分佈（folded Normal），而第 (i) 部分中的條件分佈則是截斷正態分佈（truncated Normal）；比值 $\phi(c)/\big(1 - \Phi(-c)\big)$ 稱為逆米爾斯比率（inverse Mills ratio），在計量經濟學（econometrics）中處理刪失（censored）或經篩選數據的模型裏擔當核心角色。技巧 $\phi'(z) = -z\phi(z)$ 亦是用於正態逼近的斯坦因方法（Stein's method）的起點。如想深入了解條件期望，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。