詳細解答

STEP III 2012，第 12 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q12

關鍵思路

把三角形分成三個以 P 為公共頂點的小三角形，就可看出三段距離之和必定等於高。至於最小值，最簡潔的切入點是尾概率（tail probability）$\mathrm{P}(X > x)$。「每段距離都大於 x」這個事件對應一個與原三角形相似（similar）的較小三角形，而相似圖形的面積按長度比的平方縮放。在三維空間中，同一思路改用體積亦同樣奏效，而體積按立方縮放。

解答

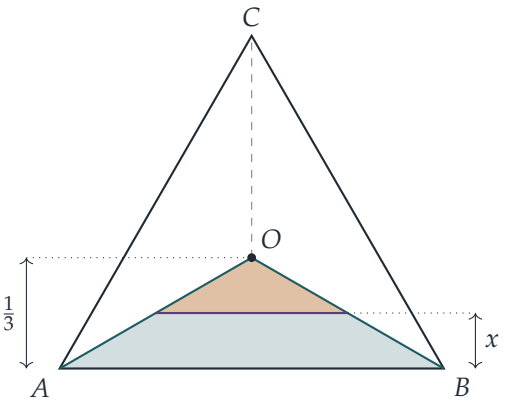
第 (i) 部分

設三角形的邊長為 s。由於高為 1，ABC 的面積為 $\frac{1}{2}s$。把 P 與三個頂點連起來，便把 ABC 分成三角形 PAB、PBC 和 PCA。它們的底就是三條邊，長度均為 s，而它們的高分別是 x_1、x_2 和 x_3。把面積相加，

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{所以} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

得證。

X_1 **為最小值的區域**。與 AB 和 CA 等距的點都在角 A 的角平分線（angle bisector）上。在這條角平分線靠 B 的一側，P 與 AB 的距離比與 CA 的距離小。同理，P 與 AB 的距離比與 BC 的距離小，當且僅當 P 位於角 B 的角平分線靠 A 的一側。在等邊三角形中，角平分線同時也是中線（median），三者相交於中心 O。因此，$X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ 當且僅當 P 位於三角形 ABO 內（下圖陰影部分）。O 到 AB 的距離是高的三分之一，即 $\frac{1}{3}$。



X 的概率密度函數。三個三角形 ABO、BCO 和 CAO 全等（congruent），所以各自的概率都是 $\frac{1}{3}$。（距離相等的情況只會出現在角平分線上，而角平分線的面積為零。）由對稱性，X 的分佈（distribution）與「在 P 位於 ABO 內的條件下」X_1 的分佈相同。在這情況下 $X = X_1$，即 P 到 AB 的距離。

> **想一想** 在三角形 ABO 內，哪些點滿足 $X_1 > x$？

它們是位於與 AB 平行、相距 x 的直線上方的點，亦即以 O 為頂點的琥珀色小三角形。它與 ABO 相似，高為 $\frac{1}{3} - x$，而 ABO 的高為 $\frac{1}{3}$，所以它的面積是 ABO 面積的 $((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3})^2 = (1-3x)^2$ 倍。因此，當 $0 \le x \le \frac{1}{3}$ 時，

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

此外，由於三段距離之和為 1，X 不可能超過 $\frac{1}{3}$。求導，

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

其他情況下 $\mathrm{f}(x) = 0$，得證。

期望值（expected value）。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2 - 6x^3\Big]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

第 (ii) 部分

設該點到四個面的距離為 $Y_1, \ldots, Y_4$，並設 $Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$。每個面的面積都是 S，而體積為 $\frac{1}{3}S \cdot 1$。把該點與四個頂點連起來，便把四面體分成四個較小的四面體。每個小四面體以一個面為底，以其中一個 Y_i 為高，所以

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \tfrac{1}{3}S, \qquad \text{所以} \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1.$$

重心（centroid）到每個面的距離都是 $\frac{1}{4}$，所以內切球（inscribed sphere）的半徑為 $\frac{1}{4}$。

想一想 現在集合 $\{Y > y\}$ 是甚麼樣子？

它是與四個面的距離都大於 y 的點所組成的集合。每個面平行地向內移動 y，得出一個重心相同的較小正四面體（regular tetrahedron）。重心到每個面的距離由 $\frac{1}{4}$ 降至 $\frac{1}{4} - y$，所以比例因子（scale factor）為 $(\frac{1}{4} - y)/\frac{1}{4} = 1 - 4y$。體積按比例因子的立方縮放，所以當 $0 \le y \le \frac{1}{4}$ 時，

$$\mathrm{P}(Y > y) = (1 - 4y)^3.$$

（把同一論證應用於第 (i) 部分的三角形，可直接得出 $(1 - 3x)^2$：內部三角形的內切圓半徑（inradius）為 $\frac{1}{3} - x$。）

由於 $Y \ge 0$，我們可以把尾概率積分來求 $\mathrm{E}(Y)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^{1/4} \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} (1 - 4y)^3\,\mathrm{d}y = \left[-\tfrac{1}{16}(1 - 4y)^4\right]_0^{1/4} = \tfrac{1}{16}.$$

如果你較喜歡用概率密度函數，它在 $[0, \frac{1}{4}]$ 上是 $12(1 - 4y)^2$，而 $\int_0^{1/4} 12y(1 - 4y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}$，結果一樣。

所以到最近一個面的距離的期望值是 $\frac{1}{16}$。

驗算

- $\int_0^{1/3} 6(1 - 3x)\,\mathrm{d}x = 1$，所以 f 確實是一個概率密度函數。
- 這裏有一個規律：在高為 1 的三角形中，$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$；在高為 1 的四面體中，$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$。在一維情況下，$[0, 1]$ 中隨機一點到較近端點的距離的平均值是 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$，同樣吻合。
- 在三角形內取 4×10^5 個隨機點進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），得出平均值 0.1110（理論值 $\frac{1}{9} \approx 0.1111$），而直方圖（histogram）與 $6(1 - 3x)$ 吻合。在四面體內取 3×10^5 個點，平均值為 0.0625（理論值 $\frac{1}{16} = 0.0625$）。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{P}(X > x)$ 求導時漏了負號：概率密度函數是 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$。
- 忘記內部三角形的高是 $1 - 3x$ 而非 $1 - x$：三條邊各自向內移動了 x。
- 在第 (ii) 部分用了比例因子的平方。體積是按立方縮放的。

STEP 之外

這道題目中的兩個工具，在大學第一個概率課程裏經常出現：透過 $\mathrm{P}(\min > x)$ 求最小值的分佈，以及對非負隨機變量（random variable）計算 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$。這個規律還可以延續下去：在高為 1 的 n 維單形（simplex）中，到最近一個面的距離的期望值是 $1/(n+1)^2$。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩個工具都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。