詳細解答

STEP III 2012，第 11 題

力學 • 下落的對摺繩

> **STEP III 2012，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q11

關鍵思路

一切都源於繩圈的幾何。只要知道質點下落了 x 時，靜止部分和移動部分各有多長，就可以寫出損失的勢能（potential energy）（利用每段直繩的質心（centre of mass））和增加的動能（kinetic energy）（只有質點和移動部分具有速率）。由能量守恆（conservation of energy）便可得出 v^2 作為 x 的函數，而加速度則可由 $\frac{1}{2}v^2$ 對 x 求導得出，因為 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

解答

模型與幾何

我們把繩子視為一條均勻、不可伸長（inextensible）、完全柔軟的線，其單位長度質量為

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

把質點視為點質量，並假設繩圈底部的彎曲部分大小可以忽略。深度由 P 向下量度。

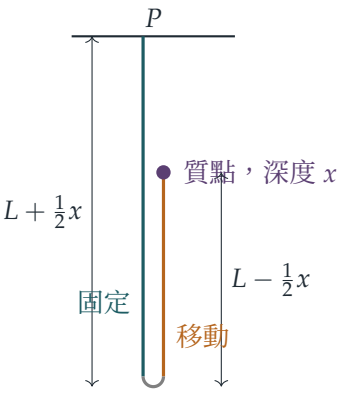
當質點下落了距離 x 時，繩子由兩段豎直部分組成，兩者在繩圈底部相接，設該處深度為 d：

- 固定部分，由 P 向下延伸至底部，處於靜止，長度為 d；
- 移動部分，由質點（深度 x）向下延伸至底部，長度為 $d - x$。

總長度為 $2L$，所以 $d + (d - x) = 2L$，得

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{移動部分長度} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

（開始時 $x = 0$，兩部分的長度都是 L。）



損失的勢能

每段直繩都是均勻的，所以其質心位於中點。在深度 h 處，質量 μ 的勢能為 $-\mu gh$。設 $D(x)$ 為整個系統中各部分「質量 × 深度」之和：

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d-x)\cdot\frac{x+d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}\left(2d^2 - x^2\right) \\ &= mx + \rho\left(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = mx + \rho\left(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\right). \end{aligned}$$

開始時 $D(0) = \rho L^2$，所以損失的勢能為

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\left(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\right) = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

這裏用了 $\rho L = M$。

增加的動能

固定部分處於靜止。質點以及移動部分上的每一點都具有速率 v（題目要求我們如此假設），所以移動中的質量為 $m + \rho\big(L - \frac{1}{2}x\big)$，而

$$\text{動能} = \tfrac{1}{2}\left(m + M - \frac{Mx}{2L}\right)v^2 = \frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2.$$

系統由靜止開始，所以由能量守恆得動能 = 損失的勢能：

$$\frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2 = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

即

$$v^2 = \frac{2gx\big(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\big)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

此即所求。當 $x < 2L$ 時分母永不為零，因為此時 $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$，所以 $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$。

加速度

為簡潔起見，記

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

於是 $\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$，且 $A' = -\frac{1}{4}M$、$B' = -\frac{1}{2}M$（對 x 求導）。

> **想一想** 已知 v^2 是 x 的函數，怎樣才能得出加速度？

由鏈式法則（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，這正是加速度。只要質點在向下移動，即 x 隨 t 遞增，這個做法便成立。

由乘積法則（product rule）和商法則（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

關鍵的化簡在於 $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$，所以第一個分數恰好等於 1。因此

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

此即所求。

加速度大於 g

釋放後，$0 < x < 2L$。此時

- 如上所示，$B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$，所以 $B^2 > 0$；
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$；
- $M > 0$、$g > 0$ 且 $x > 0$。

所以額外項 $\frac{MgxA}{2B^2}$ 嚴格為正，對於 $0 < x < 2L$ 中的每個 x，加速度都嚴格大於 g。（在釋放的一刻，$x = 0$，加速度恰好是 g。）

驗算

- 若 $M = 0$（輕繩），兩條公式都化為自由落體（free fall）的情況：$v^2 = 2gx$，加速度為 g。

- 取 $m = 0.3$、$M = L = 1$ 及 $x = 1$，並設 $g = 9.8$：則 $A = 1.05$、$B = 0.8$，所以 $v^2 = 25.725$，而加速度為 $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，遠大於 g。在這一點對 $\frac{1}{2}v^2$ 作數值求導，得出相同的值；而由靜止開始逐步推進運動方程，亦能重現 v^2 的公式。
- 單位：mL、ML 和 Mx 的單位都是「質量 × 長度」，所以各分數都是無量綱（dimensionless）的，而 v^2 的單位與 gx 相同。

常見錯誤

- 把移動部分的長度弄錯：繩圈底部向下移動 $\frac{1}{2}x$，而不是 x，因為下落一側所收入的繩子由兩側平分。
- 給固定部分加上動能，或忘記固定部分的勢能同樣會改變（它變長了，所以其質心下降）。
- 對 v^2 而不是 $\frac{1}{2}v^2$ 求導，結果得出加速度的兩倍。

STEP 之外

這是經典的「下落摺疊鏈」問題，是一個運動中的質量隨時間改變的系統。這裏採用的能量守恆模型預測鏈端的加速度大於 g；若 $m = 0$，當 $x \to 2L$ 時速率會無限增大，這正是揮鞭時發出爆響背後的原理。在彎曲處能量是否真的守恆，在研究文獻中一直有爭論；而以真實鏈條進行的實驗顯示，加速度確實如這裏所述般大於 g。變質量系統（variable-mass systems），以及如何審慎地選用能量或動量（momentum）方法，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。