詳細解答

STEP III 2012，第 10 題

力學 • 圓周運動

STEP III 2012，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

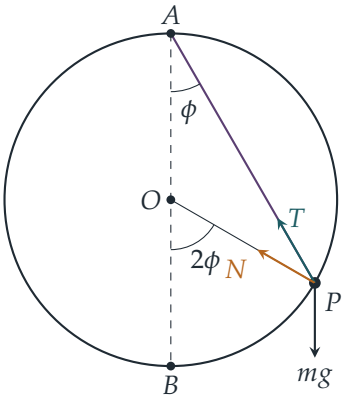
step.maths.org/questions/12-s3-q10

關鍵思路

一切都歸結為一個等腰三角形（isosceles triangle）的幾何：它由圓環的圓心、圓環的最高點和小環三點組成。只要看出繩長是 $2a\cos\phi$，而小環所在的半徑與豎直向下方向成 2ϕ 角，整道題就只需一條能量方程（energy equation）（求 λ 和速率）和一條徑向運動方程（radial equation of motion）（求反作用力）。

解答

我們把小環視為在光滑圓周上運動的質點，並把繩子視為遵守胡克定律（Hooke's law）的輕彈性繩。設 O 為圓環的圓心，A 為其最高點，B 為其最低點，P 為小環，並記 $c = \cos\phi$。



幾何

三角形 OAP 中 $OA = OP = a$，所以它是等腰三角形，在 A 和 P 的兩個角都是 ϕ。因此

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

於是 P 在 O 下方的深度是 $a\cos 2\phi$，而它在 B 上方的高度是 $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$。繩子（拉緊時）的伸長量（extension）為 $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$；當 $2c-1=0$，即 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 時，繩子變得鬆弛。

彈性模量

圓環是光滑的，反作用力（reaction）與運動方向垂直，所以機械能守恆（conservation of mechanical energy）。在 B（$\phi = 0$）時，小環靜止，伸長量為 a，所以彈性勢能為 $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$。在 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 時，小環再次靜止，繩子剛好變得鬆弛（沒有彈性勢能），而小環已上升了 $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$。因此

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

這就是彈性模量（modulus of elasticity）。

速率

在一般角度 ϕ 而繩子拉緊時，由 B 起應用能量守恆，得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi\\ &= \tfrac{3}{2}mga[1-(2c-1)^2] - 2mga(1-c^2)\\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2\\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

此式在 $c=1$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 時為零，在兩者之間為正，這與小環在 $\phi = -\frac{\pi}{3}$ 與 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 之間來回運動相符：小環靜止後會滑回並經過 B，到達另一邊的對稱點，如此往復。整個過程中 $\frac{1}{2} \le c \le 1$，繩子一直拉緊（只在兩個端點剛好鬆弛），張力為

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

反作用力

設 N 為反作用力指向 O 的分量，如圖所示（結果可能是負數）。我們沿 PO 指向圓心的方向分解各力：

- 張力沿 PA 作用，而 PA 與 PO 成 ϕ 角（即等腰三角形的底角），所以張力指向 O 的分量是 $T\cos\phi$；
- OP 與豎直向下方向成 2ϕ 角，所以重力有一個背離 O 的分量 $mg\cos 2\phi$。

想一想 為甚麼這裏重力的分量是向外而不是向內？

當 $\phi < \frac{\pi}{4}$ 時，小環在 O 的下方，重力把它拉離圓心；單一表達式 $-mg\cos 2\phi$（指向 O）已涵蓋兩種情況，因為當 P 越過 O 的水平高度時，$\cos 2\phi$ 會變號。

沿指向圓心的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

代入 T、mv^2/a 及 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$：

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

因此反作用力的大小為

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

正如所求，前提是括號內的式子永不為負，下面我們便證明這一點。（負號告訴我們，在整個運動中，圓環都是把小環向外推，即背離 O。）

R 永不為零

二次式 $12c^2 - 15c + 5$ 的判別式（discriminant）為 $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$，而首項係數（leading coefficient）為正，所以它對每個實數 c 都嚴格為正。配方（completing the square）得

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

所以在整個運動中 $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$，最小值出現在 $\cos\phi = \frac{5}{8}$ 時（此值位於 $[\frac{1}{2}, 1]$ 內，所以確實能取到）。

驗算

- 在 B（$c = 1$）：小環靜止，$T = 3mg$ 向上，重力 mg 向下，所以圓環必須以 $2mg$ 向下推。公式給出 $(12 - 15 + 5)mg = 2mg$。

- 在鬆弛點（$c = \frac{1}{2}$）：沒有張力，速率為零，P 在 O 上方 $\frac{a}{2}$ 處，所以徑向反作用力與向內的重力分量 $mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}mg$ 平衡。公式給出 $(3 - 7.5 + 5)mg = \frac{1}{2}mg$。
- 我們以數值方法積分運動方程（四階龍格－庫塔法（RK4），從稍為偏離 B 的位置出發）：小環在距 B 角度 $2.094 \approx \frac{2\pi}{3}$ 處停下，計算所得的反作用力與公式的誤差在 10^{-7} 以內，其最小值為 $0.3125\,mg = \frac{5}{16}mg$。

常見錯誤

- 把小環的角位置當作 ϕ 而不是 2ϕ：圓周角是圓心角的一半。
- 在胡克定律或彈性勢能中，用了整條繩長 $2a\cos\phi$，而不是伸長量 $2a\cos\phi - a$。
- 假設反作用力指向內，然後對得到負數答案感到困惑；其實題目只要求反作用力的大小。

STEP 之外

小環只有一個自由度（degree of freedom），處理這類系統最簡潔的方法，是用單一坐標寫出能量（或拉格朗日（Lagrangian））表述，之後再由牛頓定律求出像 R 這樣的約束力（constraint force）。這種分工——由能量得出運動方程，由分解力得出約束力——正正是大學一年級力學課程處理「金屬線上的珠子」問題的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便以這種思路講解帶約束的圓周運動和能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。