詳細解答

STEP III 2012，第 1 題

純數學 • 非線性微分方程

STEP III 2012，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q1

關鍵思路

兩條微分方程（differential equation）都是二階（second order）而且非線性（non-linear）的，所以沒有現成的標準解法。竅門在於：只要適當地選取 n，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 中的括號就可以與每條方程的左邊吻合。這樣，方程便表示 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 等於某個可以立即積分的式子，從而得到一條可以分離變數（separation of variables）的一階（first-order）方程。

解答

預備結果

記 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 及 $y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$。由乘積法則（product rule），並對 y^n 及 $(y')^2$ 使用鏈式法則（chain rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'(n(y')^2 + 2yy''),\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

第 (i) 部分

左邊是 $(y')^2 + 2yy''$，即 $n = 1$ 時的括號。因此取 $z = y(y')^2$，則

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'((y')^2 + 2yy'') = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

積分得 $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$。在 $x = 0$ 時有 $y = 1$ 及 $y' = 0$，所以 $0 = \frac{2}{3} + C$，於是

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}(y^{3/2} - 1). \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 只告訴我們 $(y')^2$。開平方時應取哪個符號？而 $y \equiv 1$（它使兩邊都等於零）又是否可能？

常數 $y \equiv 1$ 並不是原方程的解：代入會得到 $0 = 1$。事實上，把 $x = 0$ 代入方程得 $0 + 2y''(0) = 1$，所以 $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$。因此 y 在 $x = 0$ 處取極小值，而對細小的 $x > 0$ 有 $y' > 0$。此外，方程在 $x \mapsto -x$ 下保持不變，所以解是偶函數（even function），我們可以只考慮 $x > 0$、$y' > 0$、$y > 1$ 的情況。

把 $(*)$ 乘以 y，取正平方根，再分離變數：

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

代換 $w = y^{3/2} - 1$，則 $\mathrm{d}w = \frac{3}{2} y^{1/2}\,\mathrm{d}y$。左邊變成 $\frac{2}{3} w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，由 $x = 0$（此時 $w = 0$）起積分，

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16} \cdot \tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

所以 $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$，而由偶函數性質，此式對 $x < 0$ 亦成立。因此

$$y = (\tfrac{3}{8}x^2 + 1)^{2/3},$$

得證。

直接驗算：設 $u = \frac{3}{8}x^2 + 1$，則 $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$，所以 $y(y')^2 = u^{2/3} \cdot \frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$。另一方面 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$，所以 $(*)$ 成立。

第 (ii) 部分

現在左邊是 $(y')^2 - yy''$。我們需要 $n(y')^2 + 2yy''$ 是它的倍數，所以 $n : 2 = 1 : -1$，得 $n = -2$。取 $z = y^{-2}(y')^2$（這是可以的，因為 y 接近 1，故不為零），

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'(-2(y')^2 + 2yy'') = -2y^{-3}y'((y')^2 - yy'') = -2y^{-3}y'\,(-y^2) = \frac{2y'}{y},$$

這裏用了方程的形式 $(y')^2 - yy'' = -y^2$。積分得 $z = 2\ln y + C$，而 $x = 0$ 給出 $0 = 0 + C$。所以

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 2\ln y.$$

設 $v = \ln y$，則 $v' = y'/y$，方程變成 $(v')^2 = 2v$，且 $v(0) = 0$。

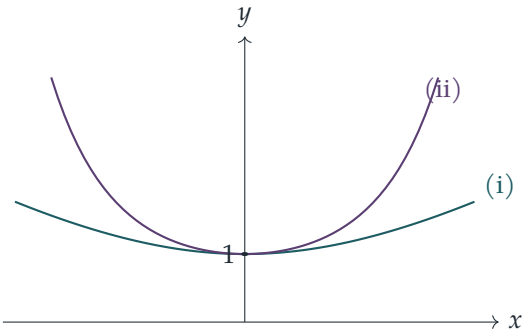
與第 (i) 部分一樣，$v \equiv 0$（即 $y \equiv 1$）滿足這條一階方程，卻不滿足原方程（代入會得到 $1 = 0$）。在 $x = 0$ 時，原方程給出 $0 - y''(0) + 1 = 0$，所以 $y''(0) = 1 > 0$。方程同樣在 $x \mapsto -x$ 下不變，所以我們取 $x > 0$，此時 $v' > 0$。於是

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

而由偶函數性質，此式對所有 x 成立。因此

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

驗算：$y' = xy$ 及 $y'' = (1+x^2)y$，所以 $(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2(x^2 - 1 - x^2 + 1) = 0$。此外 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 0$。



驗算

- 兩個解都是偶函數，並在 $x = 0$ 處取極小值 1，與 $y''(0)$ 的值所預示的一致。
- 第 (ii) 部分有一條更快的途徑：直接把 $y = \mathrm{e}^v$ 代入方程，得 $y' = v'\mathrm{e}^v$ 及 $y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$，所有項消去後只剩 $v'' = 1$。所以立即得 $v = \frac{1}{2}x^2$。
- 數值上，以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）由 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ 求解 (i)，得 $y(2) \approx 1.842016$，與 $(\frac{5}{2})^{2/3}$ 吻合。對 (ii) 則得 $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$。

常見錯誤

- 忘記 z 的積分常數（constant of integration）。在第 (i) 部分，初始條件（initial conditions）使它不為零：$C = -\frac{2}{3}$。
- 在第 (ii) 部分照搬類比而選 $n = 1$。$(y')^2$ 與 yy'' 的係數之比必須吻合，這就迫使 $n = -2$。
- 從一階方程接受 $y \equiv 1$，卻沒有用原方程加以檢驗。

STEP 之外

這裏的方法是二階方程的積分因子（integrating factor）。把 $(y')^2 + 2yy''$ 乘以 y'，就變成一個恰當導數（exact derivative），正如把 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 乘以 $\dot{x}$ 便得到能量守恆（conser-

vation of energy）一樣。像這兩條不顯含 x 的方程，總可以把 $p = y'$ 看成 y 的函數，從而降為一階。對 $y \equiv 1$ 的顧慮，讓我們窺見解的非唯一性（non-uniqueness）：$v' = \sqrt{2v}$ 在 $v = 0$ 處不滿足利普希茨條件（Lipschitz condition）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了降階法（reduction of order）以及存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。