詳細解答

STEP II 2012，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

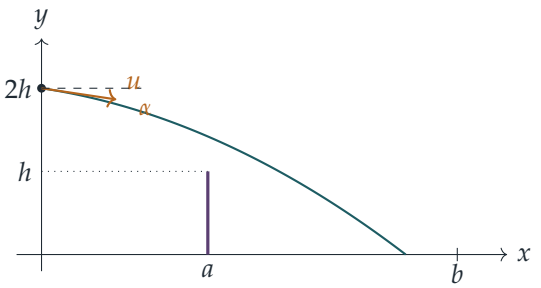
step.maths.org/questions/12-s2-q9

關鍵思路

把球的高度寫成它與拋出點之間水平距離 x 的函數，也就是軌跡方程（trajectory equation）。這樣，「越過球網」就是 $x = a$ 處的一個不等式，而「在 b 之前着地」則是關於飛行時間（time of flight）的一個不等式。最後一部分之所以行得通，是因為兩個條件原來都是同一個量 $1/u^2$ 的界：一個是上界（upper bound），一個是下界（lower bound）。因此下界必須小於上界，u 便隨之消去。

解答

我們把球視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），忽略空氣阻力（air resistance）和自旋（spin），並設 $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$。取原點為拋出點正下方的地面，$x$ 軸水平指向球網，y 軸鉛直向上。



越過球網

初速度的水平分量為 $u\cos\alpha$，鉛直分量為 $u\sin\alpha$，方向向下。經過時間 t 後，

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(u\cos\alpha)$ 消去 t，得軌跡

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

水平速度是正的常數，所以球恰好一次到達 $x = a$，而當該處 $y > h$ 時，球便越過球網：

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

兩邊乘以正數 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$，得

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

此即所求。

在 b 之前着地

球下降了 $2h$ 時便着地，即 $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$ 之時。這個關於 t 的二次方程（quadratic equation）的兩個根（roots）異號（兩根之積為 $-4h/g < 0$），而着地時間是正根：

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

球在水平距離 b 之前着地，當且僅當 $uT\cos\alpha < b$，即 $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$（因為 $u\cos\alpha > 0$）。兩邊乘以 g 再加上 $u\sin\alpha$，得

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

這就是第二個結果。

最後的不等式

想一想 兩個涉及 u 的條件，怎樣才能得出一個不含 u 的條件？

第一個結果是 $1/u^2$ 的上界。如果能把第二個結果化為 $1/u^2$ 的下界，那麼無論 u 是多少，下界都必須小於上界。

第二個不等式兩邊皆為正（右邊為正，是因為 $\sin\alpha \geq 0$ 且 $\cos\alpha > 0$），所以兩邊平方後不等號方向不變：

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ 項互相抵消，剩下 $2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$，即

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

與第一個結果合併，得

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

約去正因子 $2/(g\sec^2\alpha)$，再整條乘以 $a^2b^2 > 0$，

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff\quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff\quad & ab(b - a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

想一想 可以除以 $b - a$ 嗎？

可以，但正負號很重要。在 $x = a$ 處，球仍高於高度 $h > 0$，所以它的着地距離大於 a；而它又在 b 之前着地。因此 $b > a$，故 $ab(b - a) > 0$，相除後不等號方向保持不變：

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b - a)}.$$

驗算

- 單位（units）：$a\tan\alpha$ 與 h 一樣是長度，ga^2/u^2 也是長度，所以 $1/u^2$ 的每個界的單位都是 $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$，理應如此。
- 當 $\alpha = 0$ 時，最終結果變成 $b^2 > 2a^2$。事實上，水平拋出的球到 $x = a$ 時下降少於 h；由於下降量與 x^2 成正比，到 $x = \sqrt{2}\,a$ 時它下降少於 $2h$，所以它在 $\sqrt{2}\,a$ 之外着地，故 $b > \sqrt{2}\,a$。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$u = 12$、$\alpha = 0.2$、$h = 1.5$，逐步模擬運動得着地距離為 6.7759，與 $uT\cos\alpha$ 吻合。在 20 000 個隨機情況中，首兩個不等式與「越過球網」及「在 b 之前着地」完全對應，而每當兩者同時成立時，最後的不等式亦成立。

常見錯誤

- 把初速度的鉛直分量當成 $+u\sin\alpha$：球是在水平線*以下*拋出的。
- 未檢查兩邊是否皆為正，便把不等式平方。
- 除以 $b-a$ 時沒有說明它為何是正數。

STEP 之外

最後一部分是在不等式之間消去參數（eliminating a parameter）的一個小例子：若 L 和 U 不含 u，則不等式組 $L<1/u^2<U$ 有解當且僅當 $L<U$。把同一想法系統地應用於大量線性不等式，便是 Fourier–Motzkin 消去法（Fourier–Motzkin elimination），它是線性規劃（linear programming）的基礎之一。至於力學方面，包括考慮空氣阻力、軌跡不再是拋物線（parabola）的拋射體（projectile）運動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。