詳細解答

STEP II 2012，第 8 題

純數學 • 非線性遞推關係

> **STEP II 2012，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q8

關鍵思路

遞推關係（recurrence）$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$ 是非線性（non-linear）的，但它對每一個 n 都成立，所以把它寫成兩個相鄰 n 值的形式再相減，就能消去那個麻煩的常數 q^2。剩下的式子說明比值 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 永遠不變，於是數列便化為一個常係數為 p 的線性遞推關係（linear recurrence）。開首的不等式正正就是 $p > 2$ 這個命題，而它正是推動數列增長的原因。

解答

不等式

把所有項化為公分母（common denominator）$\alpha\beta$，

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

由於 $\beta - \alpha > q > 0$，兩邊平方（兩邊皆為正）得 $(\beta - \alpha)^2 > q^2$，所以分子為正。因為 $\alpha, \beta > 0$，分母 $\alpha\beta$ 亦為正。因此該式為正，得證。

第一個恆等式

把遞推關係兩邊乘以 u_{n-1}：對每一個 $n \geq 1$，

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

以 $n+1$ 代替 n（這仍然容許，因為 $n+1 \geq 1$），

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

以第二式減去第一式，消去 q^2：

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

移項整理後得

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

對所有 $n \geq 1$ 成立，這就是所求的恆等式（identity）。

線性遞推關係

想一想 剛證明的恆等式含有四個不同的項。它怎樣能給出只含單一常數 p 的遞推關係？

把它除以 $u_n u_{n+1}$；由於數列沒有任何一項為零，這是容許的：

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

所以量 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 對所有 $n \geq 1$ 滿足 $v_{n+1} = v_n$：它是常數。設其公共值為 p；則 $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$，即

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

要求 p，取 $n = 1$。由遞推關係得 $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$，所以

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

這正是第一部分中的式子，所以當 $\beta - \alpha > q$ 時，我們已經知道 $p > 2$。

當 $\beta > \alpha + q$ 時數列遞增

設 $d_n = u_{n+1} - u_n$。利用線性遞推關係的形式 $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$，

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

想一想 我們知道 $p - 2 > 0$，但為甚麼 $(p-2)u_n$ 會是正數？我們還未知道 $u_n > 0$。

正值性與增長必須一併證明，方法是歸納法（induction）。命題：對每一個 $n \geq 1$，$u_n > 0$ 且 $d_{n-1} > 0$。

當 $n = 1$：$u_1 = \beta > 0$ 且 $d_0 = \beta - \alpha > q > 0$。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $u_n > 0$ 及 $d_{n-1} > 0$。那麼由於 $p > 2$，

$$d_n = d_{n-1} + (p-2)u_n > 0, \qquad u_{n+1} = u_n + d_n > 0,$$

這就是 $n+1$ 的情況。由歸納法，對每一個 $n \geq 0$ 都有 $d_n = u_{n+1} - u_n > 0$，所以數列嚴格遞增（strictly increasing）。（事實上，差本身也在遞增，所以增長比線性更快。由於每一項都是正數，在這情況下「沒有任何一項為零」這個條件自動成立。）

$\beta = \alpha + q$ 的情況

此時 $(\beta - \alpha)^2 - q^2 = 0$，所以 $p = 2$ 剛好成立，且 $d_n - d_{n-1} = 0$。所有差都等於 $d_0 = \beta - \alpha = q$，所以數列是等差數列（arithmetic progression）

$$u_n = \alpha + nq.$$

由於 $q > 0$，它仍然嚴格遞增，但現在只是線性增長。直接驗證：$(\alpha + (n+1)q)(\alpha + (n-1)q) = (\alpha + nq)^2 - q^2$，所以這個數列確實滿足原來的遞推關係。

驗算

- 取 $\alpha = 1$、$\beta = 4$、$q = 2$（於是 $\beta > \alpha + q$）。遞推關係給出 $1, 4, 12, 35, \frac{407}{4}, \ldots$，而 $p = \frac{1+16-4}{4} = \frac{13}{4}$；確實 $\frac{13}{4} \cdot 4 - 1 = 12$ 及 $\frac{13}{4} \cdot 12 - 4 = 35$。
- 取 $\alpha = 1$、$q = 2$、$\beta = 3$，各項為 $1, 3, 5, 7, \ldots$，即最後一部分的等差數列。
- 我們以精確的有理數運算，對數百組隨機的 α, β, q 驗證了兩個恆等式，並驗證了每當 $\beta > \alpha + q$ 時數列都是遞增的。

常見錯誤

- 未先知道 $u_n > 0$，便由 $p > 2$ 推出 $d_n > d_{n-1}$：這兩個事實必須放在同一個歸納法中。
- 除以 $u_n u_{n+1}$ 時沒有指出它不等於零。
- 忘記相減那一步用到的是指標為 $n+1$ 的遞推關係，而這需要 $n+1 \geq 1$。

STEP 之外

一個暗中滿足某線性遞推關係的非線性遞推關係，我們說它具有一個隱藏的不變量（invariant）：這裏是 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$，或等價地 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$，它是力學中守恆

量（conserved quantity）的離散類比。線性遞推關係 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$ 的解為 $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$，其中 $\lambda + \lambda^{-1} = p$；當 $p > 2$ 時它是實數且呈指數增長，而在重根（repeated root）的情況 $p = 2$ 下則變為 $A + Bn$，正正就是上面的二分情況（dichotomy）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多 STEP 風格的遞推關係題目，而與微分方程（differential equations）的平行關係，則在 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）中有所發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。