詳細解答

STEP II 2012，第 7 題

純數學 • 向量與圓

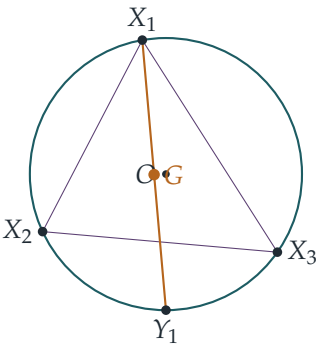
> **STEP II 2012，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q7

關鍵思路

點 Y_1 位於通過 X_1 和 G 的直線上，所以它的位置向量（position vector）是 $\mathbf{x}_1$ 與 $\mathbf{g}$ 的簡單組合，只含一個未知純量（scalar）。關於 Y_1，我們唯一知道的另一件事是它在單位圓（unit circle）上，因此 $|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$ 給出一條關於 λ_1 的方程。這是一條二次方程（quadratic equation），但其中一個根事先已顯而易見：該直線在 X_1 本身與圓相交，所以這個根可以先因式分解出來。

解答

設 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$ 及 $\lambda = \lambda_1$。由於每個 $\mathbf{x}_i$ 都是單位向量（unit vector），所以 $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$。



Y_1 的位置向量

由 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$ 得 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)),\end{aligned}$$

因為 $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$。這就是所求的表達式。

求 λ_1

因為 Y_1 在圓上，$|\mathbf{y}_1|^2 = 1$，所以 $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$。我們需要

$$|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 1+2\alpha+1 = 2+2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1\cdot(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) = \beta+\gamma.$$

因此，把 $|3\mathbf{y}_1|^2$ 展開為它與自身的點積（dot product），得

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

按 λ 的冪整理，再除以 2：

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

為了簡潔，設

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

並留意中間的係數正好是 $A-B$。所以方程為 $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$，可因式分解為：

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

想一想 為甚麼 $\lambda = -1$ 會是一個根？為甚麼可以捨去它？

把 $\lambda = -1$ 代入 $\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$，得 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$。通過 X_1 和 G 的直線上每一點都具有 $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ 的形式，而這條直線除了在 Y_1 之外，也在 X_1 與圓相交，所以這條二次方程必然以 $\lambda = -1$ 為根。題目給出 $\lambda_1 > 0$，所以 $\lambda_1 \neq -1$，因此 $A\lambda_1 = B$。

還須確認可以除以 A。若 $A = 0$，則 $A\lambda_1 = B$ 迫使 $B = 0$。但

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 3+2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{所以} \qquad B = \tfrac{1}{2}(9-|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2) = \tfrac{9}{2}(1-|\mathbf{g}|^2).$$

由三角不等式（triangle inequality），$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3| \le 3$，而等號只在三個單位向量相等時成立；由於三點互不相同，所以 $B > 0$。因此 $A \neq 0$，且

$$\lambda_1 = \frac{B}{A} = \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

得證。

最後一部分

由於 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda_1 \overrightarrow{GX_1}$ 且 $\lambda_1 > 0$，長度滿足 $GY_1 = \lambda_1 GX_1$，所以

$$\frac{GX_1}{GY_1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

把標號輪換（$1 \to 2 \to 3 \to 1$，這會把 $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），用同樣的論證便得到另外兩個比。分母 $B = 3-\alpha-\beta-\gamma$ 是對稱的，所以三者的分母相同，而分子分別為

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha, \qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

三者之和為 $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma) = 9-3(\alpha+\beta+\gamma) = 3B$。因此

$$\frac{GX_1}{GY_1} + \frac{GX_2}{GY_2} + \frac{GX_3}{GY_3} = \frac{3B}{B} = 3.$$

驗算

- 等邊三角形：此時 $G = O$，每條通過 G 的弦都是直徑，所有比都等於 1。在公式中，$\alpha = \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$，得 $\lambda_1 = \frac{9/2}{9/2} = 1$。
- 這裏有一個幾何解讀：$A = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2 = \frac{9}{2}GX_1^2$ 及 $B = \frac{9}{2}(1-OG^2)$，所以 $\lambda_1 = B/A$ 表示 $GX_1 \cdot GY_1 = 1-OG^2$，即相交弦定理（intersecting chords theorem），亦即圓冪（power of a point）定理。
- 數值驗算：取 X_1, X_2, X_3 位於角度 0、1 和 2.5 弧度處，三個比 GX_i/GY_i 約為 1.13、0.31 和 1.57，其和在機器精度內等於 3。我們用同樣方法測試了 20 000 個隨機三角形。

常見錯誤

- 忘記 $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$ 含有交叉項 2α，而不只是 $1+1$。
- 硬套二次方程求根公式，而沒有看出根 $\lambda = -1$。
- 除以 $3+\alpha-2\beta-2\gamma$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

這道題中隱藏的恆等式 $GX_1 \cdot GY_1 = 1-OG^2$，就是一點對於圓的圓冪，而上述點積計算正是它的向量證明。用內積來表述幾何，讓長度和角度全都由 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 得出，這是大學第一個線性代數（linear algebra）課程中內積空間（inner-product space）的起點。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）就是從這個觀點展開的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。