詳細解答

STEP II 2012，第 6 題

純數學 • 圓內接四邊形的面積

STEP II 2012，第 6 題

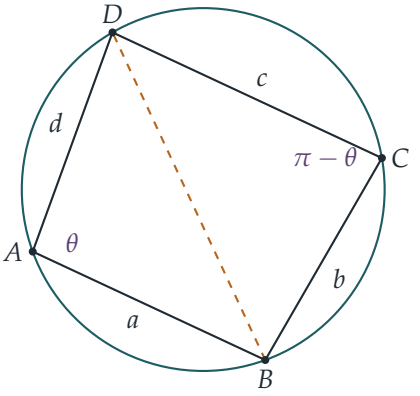
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q6

關鍵思路

對角線（diagonal）BD 把四邊形分成兩個三角形，而 BD 可以用餘弦定理（cosine rule）以兩種方式表示。圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）的特別之處在於對角之和為 π，所以 C 處的角是 $\pi - \theta$。於是 $\cos C = -\cos\theta$ 而 $\sin C = \sin\theta$，餘弦定理和面積公式 $\frac{1}{2}xy\sin(\text{夾角})$ 都只涉及同一個角 θ。之後，利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 再加上細心的因式分解（factorising），便可完成餘下的工作。

解答



求 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$

由於 $ABCD$ 是圓內接四邊形，對角 DAB 與 BCD 之和為 π，所以 $\angle BCD = \pi - \theta$。因此

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

對對角線 BD 應用餘弦定理，先在三角形 ABD 中（兩邊為 a、d，夾角為 θ），再在三角形 CBD 中（兩邊為 b、c，夾角為 $\pi-\theta$）：

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

把含 $\cos\theta$ 的項歸在一起，得 $2(ad+bc)\cos\theta = a^2+d^2-b^2-c^2$，所以

$$\cos\theta = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

對角線 BD 把四邊形分成這兩個三角形，所以它們的面積之和為 Q：

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

（由於所有邊長都是正數，我們可以除以 $ad+bc$。）

$16Q^2$ 的公式

把兩個表達式代入 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$：

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

兩邊乘以 $4(ad+bc)^2$，

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

此即所求。

婆羅摩笈多公式

右方是平方差（difference of two squares）$X^2 - Y^2$，其中 $X = 2(ad+bc)$，$Y = a^2+d^2-b^2-c^2$。

> ? **想一想** 怎樣把 $X-Y$ 和 $X+Y$ 化成一次因式的乘積？

把各項分組，使每一組再次成為平方差。把含 a,d 的項放在一起，含 b,c 的項放在一起：

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

再把兩者各自因式分解，

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

設 $2s = a+b+c+d$，則每個括號都等於 $2s$ 減去某一邊的兩倍：例如 $b+c+d-a = 2s-2a$。所以四個括號分別是 $2(s-a)$、$2(s-d)$、$2(s-b)$ 和 $2(s-c)$，而

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{即} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

這就是婆羅摩笈多（Brahmagupta）公式。

三角形的面積

每個三角形都是圓內接的，因為它的三個頂點都在其外接圓(circumcircle)上。現在讓邊 DA 縮短至零，即 D 沿圓周滑向 A。這時 $ABCD$ 變成邊長為 a、b、c 的三角形 ABC，而 $d = 0$。公式兩邊都隨 D 連續變化，所以在極限下公式仍然成立。設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，則三角形的面積 Δ 滿足

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{所以} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

這就是海倫公式（Heron's formula）。

驗算

- 單位正方形是圓內接四邊形，$s = 2$，而 $(2-1)^4 = 1$ 正是它的面積。對於 3–4–5 三角形，$s = 6$，而 $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$。
- 對於長方形，$a = c$ 且 $b = d$，所以 $\cos\theta = 0$；這是對的，因為長方形的每個角都是 $\frac{\pi}{2}$。
- 我們在圓上隨機放置了 20 000 個圓內接四邊形，把 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 和 Q^2 的公式與實際的角及鞋帶公式（shoelace formula）算出的面積比較，兩者相差不超過 3×10^{-12}。海倫公式亦與 1000 個隨機三角形的結果吻合。

常見錯誤

- 忘記 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。這會把 $+2bc\cos\theta$ 變成減號，之後的一切都會出錯。
- 試圖把 $4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ 完全展開。把它當作平方差分解兩次，快得多，也不容易出錯。

STEP 之外

對於一般的（不一定是圓內接的）四邊形，Bretschneider 公式可給出其面積。該公式減去一項 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$，其中 α 和 γ 是一對對角，所以在邊長固定時，圓內接四邊形的面積最大。海倫公式的因式分解形式亦即時顯示：三角形面積為零，當且僅當三角不等式（triangle inequality）取等號。如想看更多這種風格的幾何，可參閱考克斯特（Coxeter）與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何的新探索》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。