詳細解答

STEP II 2012，第 5 題

純數學 • 倒數函數的描繪

> **STEP II 2012，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q5

關鍵思路

兩條曲線都是倒數（reciprocal）形式，所以我們在腦中先想像分母的圖像，再把它「倒過來」：分母為零之處會出現垂直漸近線（vertical asymptote），分母很大之處 y 接近 0，而分母的轉向點（turning point）亦是曲線的轉向點。在第 (ii) 部分，兩個二次因式關於 a 與 b 的中點互為鏡像，因此把原點移到該中點，g 便成為新變量的偶函數（even function），而駐點（stationary point）則可從一條關於 t^2 的二次方程直接得出。

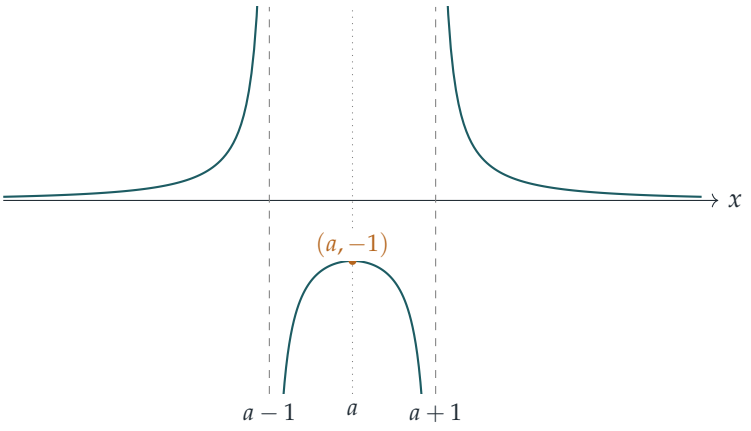
解答

第 (i) 部分

設 $D(x) = (x-a)^2 - 1$，於是 $f = 1/D$。分母 D 是一條拋物線，關於 $x = a$ 對稱，在 $x = a$ 取最小值 -1，零點為 $x = a \pm 1$。由此讀出倒數的性質：

- 曲線關於 $x = a$ 對稱，垂直漸近線為 $x = a \pm 1$。
- 當 $|x - a| < 1$ 時，$-1 \le D < 0$，所以 $f \le -1$，等號只在 $x = a$ 成立。因此 $(a, -1)$ 是局部極大點（local maximum），而當 x 從內側趨近 $a \pm 1$ 時，$f \to -\infty$。
- 當 $|x - a| > 1$ 時，$D > 0$，且 D 隨 $|x - a|$ 增大而遞增，所以 f 為正，並由 $+\infty$（在漸近線旁）遞減趨向 0。x 軸是水平漸近線（horizontal asymptote），當 $|x|$ 很大時 $f \approx 1/x^2$。

事實上 $f'(x) = -2(x-a)/D^2$ 只在 $x = a$ 處為零。曲線與 y 軸相交於 $1/(a^2 - 1)$（當 $a \neq \pm 1$ 時），但其位置取決於 a，所以我們以 $x = a$ 為參照來作圖。



第 (ii) 部分

設 $p=(x-a)^2-1$ 及 $q=(x-b)^2-1$，於是 $g=1/(pq)$。令

$$c=\tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d=\tfrac{1}{2}(b-a)>0, \qquad t=x-c,$$

使得 $x-a=t+d$ 及 $x-b=t-d$。利用 $(t+d)(t-d)=t^2-d^2$ 及 $(t+d)^2+(t-d)^2=2t^2+2d^2$，得

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2-1\big)\big((t-d)^2-1\big) \\ &= (t^2-d^2)^2-(2t^2+2d^2)+1. \end{aligned}$$

這只取決於 t^2，所以 g 關於 $x=c$ 對稱，即關於 a 與 b 的中點對稱。記 $u=t^2$ 及 $h(u)=(u-d^2)^2-2u-2d^2+1$，則

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t}=2t\,h'(u)=2t\big(2(u-d^2)-2\big)=4t\,(t^2-d^2-1).$$

由於 $g'=-(pq)'/(pq)^2$，g 的駐點就是 $(pq)'=0$ 之處：

$$t=0 \qquad \text{或} \qquad t=\pm\sqrt{d^2+1},$$

前提是這些點不是漸近線。漸近線位於 $t=\pm(d+1)$ 及 $t=\pm(d-1)$，而由於 $d<\sqrt{d^2+1}<d+1$，外側的兩個駐點必定是真正的駐點。以 a 和 b 表示，候選點為

$$x=\frac{a+b}{2} \qquad \text{及} \qquad x=\frac{a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}}{2}.$$

在這些點上的值為 $h(0)=(d^2-1)^2$ 及 $h(d^2+1)=1-2(d^2+1)-2d^2+1=-4d^2$。

想一想 這些候選點中哪些真正成立？它們是極大點還是極小點？

這取決於 $t=0$ 是否與漸近線重合，即是否有 $d=1$；這正好對應 $b>a+2$（即 $d>1$）與 $b=a+2$（即 $d=1$）兩種情況的區分。至於每個點的性質，我們不再求二階導數，而是觀察 g 在漸近線之間每個區間上的正負號，以及它在區間兩端的行為。

情況 $b > a+2$。 此時 $d > 1$，四條漸近線依次為

$$t = -(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{即} \quad x = a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

四者互不相同，且 c 嚴格位於 $a+1$ 與 $b-1$ 之間。

- 外側，$|t| > d+1$：此處 $|x-a| > 1$ 且 $|x-b| > 1$，所以 $p, q > 0$，$g > 0$。這裡沒有駐點，所以 g 由漸近線處的 $+\infty$ 下降至無窮遠處的 0，行為類似 $1/x^4$。
- 中間，$|t| < d-1$，即 $a+1 < x < b-1$：同樣 $p, q > 0$，所以 $g > 0$，且在兩端 $g \to +\infty$。唯一的駐點是 $t = 0$，因此它必定是極小點，其值為

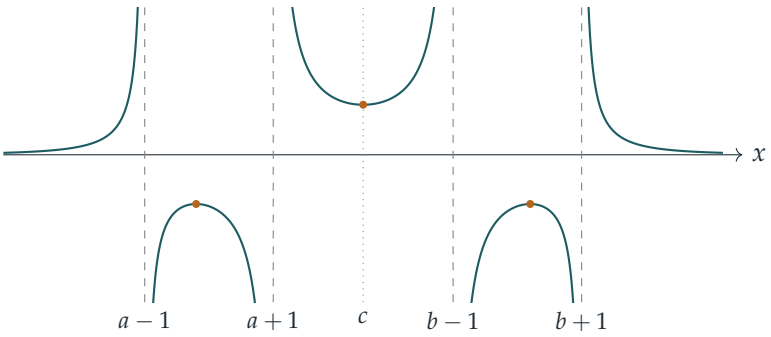
$$g(c) = \frac{1}{(d^2-1)^2} = \frac{16}{\big((b-a)^2-4\big)^2}.$$

- 兩個間隙，$d-1 < |t| < d+1$：對於 $(d-1, d+1)$ 中的 t，有 $|x-b| < 1$，但 $x - a > 2d - 1 > 1$，所以 $q < 0 < p$，$g < 0$，且在兩端 $g \to -\infty$。該處唯一的駐點是 $t = \sqrt{d^2+1}$，它必定是極大點，其值為

$$g = \frac{1}{-4d^2} = -\frac{1}{(b-a)^2}.$$

  間隙 $-(d+1) < t < -(d-1)$ 的情況與此成鏡像。

因此共有三個駐點：在 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 的一個局部極小點，以及在 $x = \frac{1}{2}\big(a+b \pm \sqrt{(b-a)^2+4}\big)$ 的兩個局部極大點，兩者均有 $y = -1/(b-a)^2$。下圖取 $b-a = 4.8$，並把 y 方向拉伸，使轉向點清楚可見。



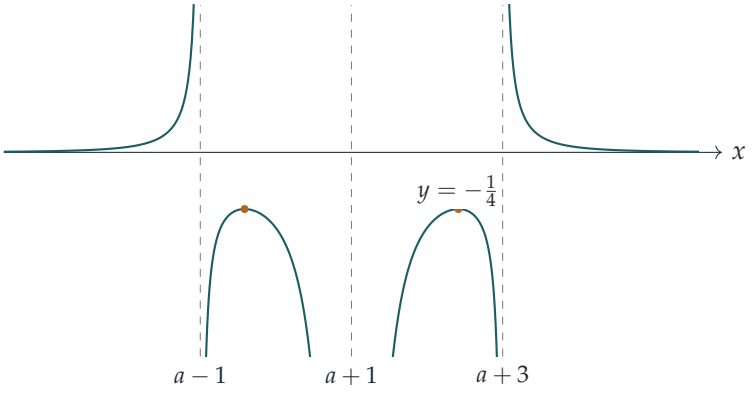
情況 $b = a+2$。 此時 $d = 1$，所以 $a+1 = b-1 = c$，中間兩條漸近線合而為一，位於 $x = a+1$。設 $t = x-a-1$，

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2-4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

所以共有三條漸近線：$x = a-1$、$a+1$、$a+3$。候選點 $t = 0$ 現在是漸近線，而不是駐點，只剩下 $t = \pm\sqrt{2}$。

- 當 $|t| > 2$ 時，$g > 0$，且 g 由 $+\infty$ 下降至 0，與前相同。
- 當 $0 < |t| < 2$ 時，$g < 0$，且無論 $t \to 0$（此處 $g \approx -1/(4t^2)$，所以兩側都向下）還是 $|t| \to 2$，都有 $g \to -\infty$。因此在 $t = \sqrt{2}$ 的駐點是極大點，其值為 $g = 1/\big(2\cdot(-2)\big) = -\frac{1}{4}$；在 $t = -\sqrt{2}$ 亦然。

因此駐點位於 $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$，兩者都是局部極大點，且 $y = -\frac{1}{4}$。（這與一般公式吻合：當 $b - a = 2$ 時，公式給出 $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$，以及 $-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$。）此時曲線在 $x = a - 1$ 與 $x = a + 3$ 之間從不升到 x 軸以上。



驗算

- 取 $a = 0$、$b = 5$：$g(2.5) = 1/\big((6.25-1)^2\big) = 1/27.5625$，而公式 $16/(25-4)^2 = 16/441$ 給出相同結果，約為 0.0363。在 $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{29}) \approx 5.193$，直接代入計算得 $g \approx -0.04 = -1/25$。
- 在第一種情況中令 $b \to a + 2$，極小值 $16/\big((b-a)^2 - 4\big)^2$ 趨向無窮大，與中間那一支消失於合併後的漸近線的情況相符。
- 對隨機的 a 和 b 以數值方法掃描 g' 的變號位置，發現當 $b > a + 2$ 時恰有三個駐點，當 $b = a + 2$ 時恰有兩個，位置與上文一致。

常見錯誤

- 把 pq 展開成關於 x 的四次多項式（quartic），再嘗試直接把三次式 $(pq)'$ 因式分解（factorise）：這樣做行得通，但對稱代換（substitution）$t = x - c$ 能令因式分解一目了然。
- 忘記在 $b = a + 2$ 的情況中，點 $x = a + 1$ 是漸近線（分母的二重零點），而不是轉向點。

► 弄錯 g 在間隙中的正負號：在該處 p、q 中恰有一個為負，所以 $g < 0$。

STEP 之外

由 D 描繪 $1/D$ 的圖像，是定性地思考函數的初步體驗：正負號、零點、對稱性及在無窮遠處的行為，在動用任何微積分之前已幾乎告訴你一切。平移 $t = x - \frac{1}{2}(a+b)$ 是利用對稱性把四次式化為關於 t^2 的二次式，這個技巧在代數和分析中反覆出現。若想了解這類作圖背後對極限和漸近線的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；若想做更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。