詳細解答

STEP II 2012，第 4 題

純數學 • 對數級數不等式

STEP II 2012，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q4

關鍵思路

一切都源自 $\ln(1+x)$ 的級數（series），以及 e^t 是遞增函數（increasing function）這個事實。要比較 $(1+\frac{1}{n})^n$ 與 e，可以先取對數（logarithm）：我們需要比較 $n\ln(1+\frac{1}{n})$ 與 1。一個各項逐漸縮小的交錯級數（alternating series）可以兩項兩項地加上括號，從而證明它小於首項；而組合 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 則把所有負項都消去，所以它大於首項。把數列夾在這兩個界之間，便得出極限（limit）。

解答

第 (i) 部分

由於 $n>1$ 且 $k\geq 1$，我們有 $(k+1)n>n>1$，當然亦有 $(k+1)n>k$。兩邊乘以 $n^k>0$，得

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

對這些正數取倒數（reciprocal），不等號方向會反轉：

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

現在在級數中代入 $x=\frac{1}{n}$；這是容許的，因為 $n>1$ 給出 $0<x<1$。把首項之後的各項兩兩分組，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

每個括號都具有 $\frac{1}{kn^k}-\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$ 的形式，其中 k 為偶數，因此由剛才證明的不等式可知它嚴格為正。

想一想 我們可以這樣為一個無窮級數加上括號嗎？

可以，因為這個級數收斂（converges）。項數為奇數的部分和（partial sums）構成全體部分和的一個子數列（subsequence），所以它們趨向同一個極限，即 $\ln(1+\frac{1}{n})$。加上括號後的級數，正正就是這些奇數項部分和組成的數列。

加括號後級數的部分和為 $\frac{1}{n}-b_1$、$\frac{1}{n}-b_1-b_2$、...，其中每個 $b_j>0$。它們遞減，所以全部都不大於 $\frac{1}{n}-b_1$，因此它們的極限亦然：

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}-b_1<\frac{1}{n},\qquad b_1=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}>0.$$

（把 b_1 單獨留出來，正是令最後的不等式成為嚴格不等式（strict inequality）的關鍵；否則一列小於 $\frac{1}{n}$ 的數，其極限有可能等於 $\frac{1}{n}$。）

兩邊乘以 $n>0$，得 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，即 $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)<1$。由於指數函數（exponential function）是遞增的，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

第 (ii) 部分

設 $x=\frac{1}{2y}$。由於 $y>\frac{1}{2}$，我們有 $0<x<1$，所以 x 與 $-x$ 都落在級數成立的範圍內：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

逐項相減（對兩個收斂級數而言這是合理的），偶次冪互相抵消，奇次冪則加倍：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

而

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}}=\frac{2y+1}{2y-1},$$

所以，利用 $2x=\frac{1}{y}$，

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)=\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}+\frac{2}{5(2y)^5}+\cdots=\frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

首項之後的每一項都嚴格為正（因為 $y>0$），所以由第二個起的部分和全部都不小於 $\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}$，因此

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}>\frac{1}{y},$$

此即所求。

至於推論，選取 y 使分數變成 $1+\frac{1}{n}$。取 $y=n+\frac{1}{2}$（對每個正整數 n，它都大於 $\frac{1}{2}$），

$$\frac{2y+1}{2y-1}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n},$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

兩邊乘以 $n+\frac{1}{2}>0$，得 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n})>1$，再取指數（同樣是遞增函數），

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

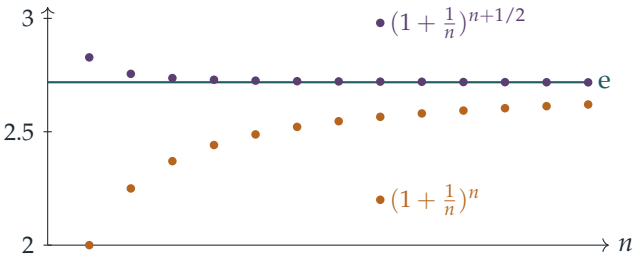
第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的結果除以 $(1+\frac{1}{n})^{1/2}>0$，並與第 (i) 部分結合，對每個整數 $n\geq 2$ 都有

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}.$$

當 $n\to\infty$ 時，$1+\frac{1}{n}\to 1$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$（平方根函數是連續（continuous）的），於是左邊趨向 e。右邊是常數 e。由夾逼定理（squeeze／sandwich theorem），

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to\mathrm{e}.$$



驗算

當 $n=10$：$(1.1)^{10}\approx 2.5937$，$(1.1)^{10.5}\approx 2.7203$，兩者確實分處 e ≈ 2.7183 的兩側。當 $n=1000$，下界 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001}\approx 2.7169237$ 僅僅略低於 $(1.001)^{1000}\approx 2.7169239$，可見這個夾逼有多緊。我們亦對直至數千的每個 n 驗證了兩條嚴格不等式，並以數值方法驗證了對隨機選取的 $y>\frac{1}{2}$，第 (ii) 部分的級數之和等於 $\ln\frac{2y+1}{2y-1}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分代入 $x = 1$：題目只給出 $|x| < 1$ 時的級數，這正是那裏需要 $n > 1$ 的原因（第 (iii) 部分只用到很大的 n，所以並無損失）。
- 直接由一列嚴格不等式的極限得出嚴格不等式。極限只保持 $\leq$；要得到 $<$，須把一個正項單獨留出來。
- 忘記取指數之所以保持不等式，只是因為 e^t 是遞增的；應當明確寫出這一點。

STEP 之外

這些界所顯示的不止於極限：由於 $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1+\frac{1}{2n}$，誤差 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ 的大小約為 $\mathrm{e}/(2n)$，所以這個數列收斂得頗慢。重排收斂級數、比較部分和以及夾逼定理，都是大學第一門分析（analysis）課程的基本功；在那裏你亦會遇到其中的微妙之處（重排條件收斂（conditionally convergent）級數可以改變其和！）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這一切有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。