詳細解答

STEP II 2012，第 3 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2012，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q3

關鍵思路

$x+\sqrt{1+x^2}$ 這個麻煩的式子，明顯應該設為 t。令這個代換（substitution）奏效的關鍵，在於它的倒數（reciprocal）是 $\sqrt{1+x^2}-x$，因此把 t 與 $1/t$ 相減和相加，便可把 x 與 $\sqrt{1+x^2}$ 都寫成 t 的簡單函數（function）。之後，兩個積分（integral）各自的重點，就是看出如何把被積函數（integrand）寫成只含 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數。

解答

恆等式

設 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。乘以共軛式（conjugate），得

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

把這兩條方程相減及相加，得

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

第一條式直接把 x 表示為 t 的函數，因此

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

至於積分上下限：當 $x=0$ 時，$t=1$；而當 $x\to\infty$ 時，$t\to\infty$。此外，t 是 x 的嚴格遞增函數（strictly increasing function）（當 $x\geq 0$ 時，x 與 $\sqrt{1+x^2}$ 皆遞增），所以這個代換在 $[0,\infty)$ 上是一一對應（one-to-one）的。因此

$$\int_0^\infty f(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第一個積分

想一想 分母 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ 怎樣才能寫成 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數？

試試平方：$(x+\sqrt{1+x^2})^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$，恰好就是分母。因此被積函數是 $f(x+\sqrt{1+x^2})$，其中 $f(t)=1/t^2$，由恆等式得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-2}+t^{-4})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\Big]_1^\infty = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

第二個積分

設 $x=\tan\theta$，則 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，即 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。當 θ 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，x 由 0 變到 ∞。由於 $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$，故 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$，且

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

其中同樣有 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 被積函數中仍有一個 $\sqrt{1+x^2}$。怎樣把它寫成 t 的式子？

我們在第一部分已經求得：$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$。所以被積函數是

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4}),$$

只是 $t=x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數。取 $f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$ 應用恆等式，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\Big)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty (t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

驗算

- 用一個簡單的 f 測試恆等式：取 $f(t)=1/t^3$，右方為 $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3}+t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\big)=\frac{3}{8}$，而用數值求積（numerical quadrature）計算左方，同樣得 0.375。

- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算原來的兩個積分，得 0.666667 及 0.466667，與 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{7}{15}$ 吻合。
- 數量級的合理性檢查：在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上，被積函數 $1/(1+\sin\theta)^3$ 由 1 降至 $\frac{1}{8}$，所以積分值介乎 $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$ 與 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ 之間。$\frac{7}{15} \approx 0.47$ 穩穩落在這個範圍內。

常見錯誤

- 先求 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，再費力地把它化成 t 的式子。先把 x 寫成 t 的函數，然後對它求導，會快得多。
- 在第二個積分中，漏掉了來自 $\mathrm{d}\theta$ 的因子 $1/(1+x^2)$，或者把 $\sqrt{1+x^2}$ 留在被積函數中，而沒有把它化成 $\frac{1}{2}(t+1/t)$。

STEP 之外

代換 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ 其實就是在 $x = \sinh u$ 時的 $t = \mathrm{e}^u$：事實上 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$，而公式 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$、$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$ 不過是用指數寫出的 $\sinh u$ 與 $\cosh u$。這類雙曲代換（hyperbolic substitution）是大學一年級處理含 $\sqrt{1+x^2}$ 的積分的標準工具。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）收錄了更多同類風格的 STEP 積分題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。