詳細解答

STEP II 2012，第 2 題

純數學 • 多項式的複合

> **STEP II 2012，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q2

關鍵思路

在複合(composition)之下，次數(degree)會相乘，所以把 p 迭代幾次，次數很快就大得無法與右方相配。比較次數就能確定 p 的次數；之後把 p 寫成帶未知係數(coefficient)的形式，每一部分都只剩下一小段代數運算。第 (ii) 部分有一條巧妙的捷徑：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 本身就是一個關於 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，因此整個左方是 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，用配方法(completing the square）便可完成。

解答

複合函數的次數

設 $\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$ 及 $\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$，其中 $a_m, b_n \neq 0$。在 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$ 中，項 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$ 的次數為 mn，首項係數為 $a_m b_n^m \neq 0$，而其餘每一項的次數至多為 $(m-1)n < mn$（當 $n \geq 1$ 時）。所以沒有任何項能抵消最高次項，故

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

(若 $n = 0$，則 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$ 是常數，而 $mn = 0$ 亦同樣成立。)

第 (i) 部分

設 p 的次數為 m。

若 $m \geq 2$，則由上述結果，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$ 的次數為 m^3，而 $3\mathrm{p}(x)$ 的次數為 $m < m^3$。所以左方的次數為 $m^3 \geq 8$，但右方 $-2x$ 的次數為 1。這是不可能的。

若 $m = 0$，則對某常數 c 有 $\mathrm{p}(x) = c$，左方是常數 $c - 3c = -2c$，不可能對所有 x 都等

於 $-2x$。這也是不可能的。

所以 $m = 1$。設 $\mathrm{p}(x) = ax + b$，其中 $a \neq 0$。於是

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

而方程變為

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{對所有} x.$$

兩個多項式（polynomial）對所有 x 都相等，當且僅當它們的係數相等，所以

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{及} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

由於 $a = 1$ 是第一式的根，它可因式分解為 $(a - 1)^2(a + 2) = 0$，得 $a = 1$ 或 $a = -2$。第二個條件是 $(a - 1)(a + 2)b = 0$，對這兩個值都自動成立，不論 b 是甚麼。因此解恰好是

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{及} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b \text{ 為任意常數.}$$

驗算第二族：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$ 及 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$，所以左方為 $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$。

第 (ii) 部分

設 p 的次數為 m。左方三項的次數分別為 m^2、$2m$ 及 m。

- 若 $m \geq 3$，則 $m^2 > 2m > m$，所以左方的次數為 $m^2 \geq 9 \neq 4$。
- 若 $m = 1$，左方的次數至多為 2；若 $m = 0$，左方是常數。兩者都不可能等於 x^4。

所以 $m = 2$。（此時 $m^2 = 2m = 4$，故 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 與 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 的最高次項次數相同，我們必須檢查它們的係數。）

設 $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$，其中 $a \neq 0$；為了少寫一點，以 P 代表 $\mathrm{p}(x)$。

? **想一想** 我們真的要把 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 完全展開嗎？

不必。按定義 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$，所以左方為

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a + 3)P^2 + (2b - 4)P + 2c,$$

這是 P 的二次式。它的 x^4 係數是 $(2a + 3)a^2$，因為 P^2 的首項（leading term）是 a^2x^4，而 P 的次數只有 2。與 x^4 比較，得

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0, \qquad \text{即} \qquad (a + 1)^2(2a - 1) = 0,$$

（看出根 $a=-1$ 後再作除法），所以 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$。

現在我們用一個簡單的事實：若 $S(x)$ 是多項式，且對某常數 K 有 $S(x)^2=x^4+K$，則 $(S-x^2)(S+x^2)=K$。當 S 的首項為 $\pm x^2$ 時，若兩個因式都不是零多項式，則至少其中一個的次數為 2，乘積便不可能是常數。所以對首項為 $\pm x^2$ 的 S，必有一個因式為零，即恰好 $S=\pm x^2$。

情況 $a=-1$。此時 $2a+3=1$，配方得

$$P^2+(2b-4)P+2c=\big(P+b-2\big)^2-(b-2)^2+2c=x^4.$$

所以 $S=P+b-2=-x^2+bx+(c+b-2)$ 滿足 $S^2=x^4+K$，其中 K 為常數，且首項為 $-x^2$。於是 $S+x^2=bx+(c+b-2)$ 的次數小於 2，而 $S-x^2$ 的次數為 2，所以上述事實迫使 $S+x^2=0$：即 $b=0$ 及 $c+b-2=0$。所以 $b=0$、$c=2$，於是 $K=(b-2)^2-2c=0$，前後一致。這給出

$$\mathrm{p}(x)=2-x^2.$$

情況 $a=\frac{1}{2}$。此時 $2a+3=4$，而

$$4P^2+(2b-4)P+2c=\left(2P+\tfrac{b-2}{2}\right)^2-\tfrac{(b-2)^2}{4}+2c=x^4.$$

現在 $S=2P+\frac{b-2}{2}=x^2+2bx+2c+\frac{b-2}{2}$ 的首項為 x^2，所以同理 $S-x^2=0$：$b=0$ 及 $2c-1=0$。所以 $b=0$、$c=\frac{1}{2}$，而 $K=\frac{(b-2)^2}{4}-2c=1-1=0$，前後一致。這給出

$$\mathrm{p}(x)=\tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

由於每一步都可以逆推，兩者確實都是解，但直接驗算一下會更安心。對 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2$，而

$$2(-x^4+4x^2-2)+3(x^4-4x^2+4)-4(2-x^2)=x^4.$$

對 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，設 $u=x^2+1$；則 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$，而左方為 $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$。

所以滿足 (ii) 中方程的多項式恰好是 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$ 及 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$。

驗算

- 在 (i) 中試 $b=1$：$\mathrm{p}(x)=x+1$ 給出 $(x+3)-3(x+1)=-2x$。
- 在 (ii) 中代入 $x=1$：對 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$，得 $\mathrm{p}(1)=1$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(1))=1$，而 $2+3-4=1=1^4$。對 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，取 $x=3$：$\mathrm{p}(3)=5$、$\mathrm{p}(5)=13$，而 $26+75-20=81=3^4$。

- 我們亦用精確運算驗證了 (i) 中兩族解對許多隨機的 b 都成立，並在一個以 $\frac{1}{4}$ 為步長取 b, c 的二次式網格上搜尋，結果只找到 (ii) 的兩個解。

常見錯誤

- 在 (ii) 中假設左方的次數就是 m^2：當 $m = 2$ 時，$2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 與 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 兩項的次數都是 4，正正因為它們有可能互相抵消，所以 a 必須由 $2a^3 + 3a^2 = 1$ 求得。
- 在 (i) 中解釋為何次數必須是 1 時，漏掉 $m = 0$ 的情況。
- 在 (i) 中求得 $a = 1$ 或 $a = -2$ 後便停下，並把 b 定為某個特定值：常數項的條件對每個 b 都成立。

STEP 之外

法則 $\deg(\mathrm{p} \circ \mathrm{q}) = \deg \mathrm{p} \cdot \deg \mathrm{q}$，與 $\deg(\mathrm{pq}) = \deg \mathrm{p} + \deg \mathrm{q}$ 一樣，依賴於係數之間沒有零因子（zero divisors）：在一個兩個非零數相乘可以得零的環（ring）中，首項可能消失，這兩條法則都會失效。像 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ 這樣的函數方程（functional equation）亦會引向迭代映射（iterated maps）與動力系統（dynamics）的研究。關於多項式環以及次數論證何時適用，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。