詳細解答

STEP II 2012，第 13 題

概率與統計 • 泊松過程的最近距離

> **STEP II 2012，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 12.19 節平面上的隨機點中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/spatial-poisson.html

關鍵思路

「最近的超級市場距離至少為 y」這件事，恰好等同於「以我們所在點為圓心、半徑為 y 的圓內沒有任何超級市場」，而泊松模型（Poisson model）直接給出這件事的概率。由此得到 Y 的累積分佈函數（cumulative distribution function），再求導便得到概率密度函數（probability density function）。之後各階矩（moments）都是高斯（Gauss）型積分（Gaussian-type integrals）：一次分部積分法（integration by parts）就能把 $\mathrm{E}(Y)$ 化為題目容許我們假設的積分，而代換（substitution）$u = y^2$ 則使 $\mathrm{E}(Y^2)$ 變得十分初等。

解答

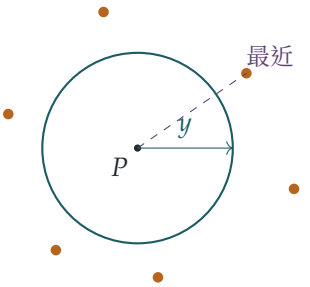
在整個解答中，我們把區域視為足夠大，可以忽略邊界效應（edge effects），因此對所有相關的 y，以所選點為圓心、半徑為 y 的圓都位於區域之內。

圓內沒有超級市場

設 N 為半徑為 y 的圓內超級市場的數目。該圓的面積為 πy^2，所以 $N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$，並且

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y 的分佈



設 P 為隨機選取的點。最近的超級市場與 P 的距離至少為 y，當且僅當以 P 為圓心、半徑為 y 的開圓內沒有超級市場。因此，對 $y \geq 0$，

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

（由於 Y 是連續隨機變量（random variable），寫 $<$ 還是 $\leq$ 並無分別。）這就是 Y 的累積分佈函數 $F(y)$；而當 $y < 0$ 時 $F(y) = 0$，因為距離不可能是負數。對 $y \geq 0$ 求導，

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

這正是所求的概率密度函數。簡單驗證一下：當 $y \to \infty$ 時 $F(y) \to 1$，所以 f 的積分等於 1。

期望值

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

想一想 指數函數前面有一個 y^2，我們怎樣才能利用題目給出的積分？

把被積函數拆成 $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$：第二個因子正是 $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ 的導數。取 $u = y$ 進行分部積分，

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

因為當 $y \to \infty$ 時 $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$（指數函數佔上風），而且它在 $y = 0$ 時等於零。現在把指數配成 $-\frac{1}{2}x^2$：設 $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$，即 $y = x/\sqrt{2\pi k}$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$。積分上下限仍然是 0 和 ∞，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

方差

計算 $\mathrm{E}(Y^2)$ 時完全不需要題目給出的積分，因為 y 的奇次冪讓我們可以代換 $u = \pi k y^2$，$\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{u}{\pi k}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

這裏用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（可用分部積分求得，或者認出它是參數為 1 的指數分佈（exponential distribution）的期望值）。因此

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4-\pi}{4\pi k},$$

正如所求。

驗算

- *標度。*若超級市場的密度變為 k 倍，長度應縮小 $\sqrt{k}$ 倍，所以 $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$，而 $\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$。兩個答案都符合這個形式。
- *正值。*$4 - \pi > 0$，所以方差是正數，理應如此。
- *數值。*取 $k = 1$，對概率密度函數作中點求積法（midpoint quadrature）得出 $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$ 及 $\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$，與 $(4-\pi)/(4\pi) \approx 0.06831$ 吻合。對某點周圍超級市場的泊松隨機散佈進行 10^5 次模擬，得出平均值 0.4996 及方差 0.0681。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$：這其實是距離 y 以內*沒有*超級市場的概率，即 $\mathrm{P}(Y \geq y)$。
- 代換時用了 $x = \sqrt{\pi k}\,y$ 而不是 $x = \sqrt{2\pi k}\,y$，結果得到 e^{-x^2} 而非題目假設的 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$，答案相差 $\sqrt{2}$ 倍。

STEP 之外

這裏的超級市場構成平面上的一個*泊松點過程*（Poisson point process），這是「完全空間隨機性」（complete spatial randomness）的基本模型，可用於描述森林中的樹木、天上的星星以及流動電話發射站。Y 的分佈是*瑞利分佈*（Rayleigh distribution），它也是兩個分量均為獨立正態隨機變量的向量之長度所服從的分佈；而我們的分部積分所揭示的簡潔尾部公式 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$，對任何非負隨機變量都成立。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了泊松過程以及這些尾部積分的概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。