詳細解答

STEP II 2012，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP II 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q12

關鍵思路

按一下開關會把它*切換*（toggle），所以泳池在走廊的開關最終處於「開」，要麼是它本來就開着而沒有被按，要麼是它本來關着而被按了一下。廚房那一半其實是障眼法（red herring）：一個以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」的開關，無論有沒有被切換，仍然以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。第 (i) 部分得出一個條件概率（conditional probability）之後，七個星期一就構成一個二項（binomial）試驗，而「最可能的值是 3」就轉化為相鄰二項概率之間的一對不等式。

解答

第 (i) 部分

定義以下事件（events）：

- H：客人按了走廊中泳池的開關，故 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$；
- A：走廊的開關一開始全部處於「開」，故 $\mathrm{P}(A) = p$；
- L：最終泳池的燈亮着。

客人是隨機選擇開關的，所以 H 與 A 互相獨立（independent）。

走廊。按過開關之後，泳池在走廊的開關處於「開」，當且僅當 A 發生而 H 不發生（它本來開着而沒有被碰），或 A 不發生而 H 發生（它本來關着而被切換成開）。所以

$$\mathrm{P}(\text{走廊的泳池開關最終為開}) = p \cdot \tfrac{3}{4} + (1-p) \cdot \tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

廚房。泳池在廚房的開關一開始以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。若它沒有被按，它保持原狀；若它

被按，它就翻轉，而一個以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「關」的開關翻轉後以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。無論客人在廚房做甚麼，它最終處於「開」的概率都是 $\frac{1}{2}$。

廚房的開關以及客人在廚房的選擇，與走廊的一切都互相獨立，所以

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

至於條件概率，$H \cap L$ 要求客人按了泳池在走廊的開關、該開關原本處於「關」（這樣按下去才會變成「開」），以及廚房的開關最終處於「開」：

$$\mathrm{P}(H \cap L) = \frac{1}{4} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

因此

$$\mathrm{P}(H \mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

得證。

第 (ii) 部分

記 $q = \dfrac{1-p}{1+2p}$。每個星期一我們都已知燈是亮着的，所以由第 (i) 部分，泳池在走廊的開關被按的概率是 q，而且每星期之間互相獨立（客人各自獨立行事，而每個星期一的初始狀態都是重新產生的）。所以開關被按的日數 X 滿足

$$X \sim \mathrm{B}(7, q).$$

我們也需要 $1-q$：

$$1-q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

（這裏 $p > 0$；若 $p = 0$，則 $q = 1$，而 $X = 7$ 必然成立，所以 3 不可能是最可能的值。）

想一想 怎樣把「3 是最可能的值」變成可以計算的東西？

比較相鄰的概率。對於 $1 \le k \le 7$，

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k} q^k (1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1} q^{k-1} (1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k} \cdot \frac{q}{1-q}.$$

因子 $\frac{8-k}{k}$ 隨 k 增大而嚴格遞減，所以當這個比值大於 1 時概率上升，一旦比值小於 1 概率便下降。因此 3 是（唯一的）最可能值，當且僅當概率由 $k=2$ 到 $k=3$ 上升，並由 $k=3$ 到 $k=4$ 下降：

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4} \cdot \frac{q}{1-q} < 1.$$

（單憑這兩個條件已足夠證明我們需要的方向：若 3 是最可能的值，則必然有 $\mathrm{P}(X = 3) > \mathrm{P}(X = 2)$ 及 $\mathrm{P}(X = 3) > \mathrm{P}(X = 4)$。）

代入 $\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$，並在兩邊乘以正數 $3p$：

- 第二個條件給出 $1 - p < 3p$，即 $p > \frac{1}{4}$；
- 第一個條件給出 $\frac{5}{3}(1 - p) > 3p$，即 $5 - 5p > 9p$，所以 $p < \frac{5}{14}$。

因此 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$，得證。

驗算

- 當 $p = 0$ 時，走廊的開關全部處於「關」，所以燈要亮，泳池的開關就必須被按過：第 (i) 部分給出 $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$，正如所料。當 $p = 1$ 時，燈要亮，該開關就必須沒有被按，而公式給出 0。
- 兩個端點分別對應 $q = \frac{1}{2}$（在 $p = \frac{1}{4}$）及 $q = \frac{3}{8}$（在 $p = \frac{5}{14}$）。當 $q = \frac{1}{2}$ 時，$\mathrm{B}(7, \frac{1}{2})$ 是對稱的，所以 3 與 4 打和；當 $q = \frac{3}{8}$ 時，$(n + 1)q = 3$，2 與 3 打和。所以嚴格不等式恰到好處。
- 我們以分數精確地列舉所有初始狀態及所有開關選擇，驗證了第 (i) 部分；又以步長 $\frac{1}{2800}$ 的網格取 p 值，計算 $\mathrm{B}(7, q)$ 的概率，驗證了第 (ii) 部分：唯一的眾數（mode）是 3，當且僅當 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$。

常見錯誤

- 忘記按一個已經處於「開」的開關會把它關掉：走廊的計算需要考慮通往「開」的兩條途徑。
- 明明答案就是 $\frac{1}{2}$，卻把廚房分情況計算；分情況討論雖然無害，卻很容易出現算術錯誤。
- 在第 (ii) 部分用 p 而不是 q 作為二項分佈的參數：正是「已知燈亮着」這個條件，把按該開關的概率由 $\frac{1}{4}$ 改變為 q。

STEP 之外

第 (i) 部分正是貝葉斯定理（Bayes' theorem）的實際應用：一個觀察結果（燈亮着）把客人按了該開關的概率由 $\frac{1}{4}$ 更新為 $\frac{1-p}{1+2p}$。第 (ii) 部分則把這個想法倒過來運用，問未知參數 p 取甚麼值時，才會與給定的最可能結果相符，這正是統計推斷（statistical inference）

和最大似然估計（maximum likelihood estimation）的萌芽。用相鄰項之比來找出眾數的技巧，適用於許多離散分佈（泊松分佈（Poisson）、超幾何分佈（hypergeometric））。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對條件概率及這些分佈有詳盡的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。