詳細解答

STEP II 2012，第 11 題

力學 • 非彈性碰撞

STEP II 2012，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

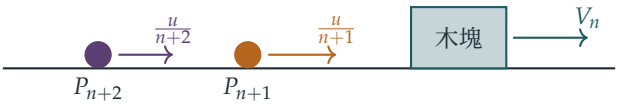
step.maths.org/questions/12-s2-q11

關鍵思路

留意每粒粒子所帶的動量（momentum）：質量 im 乘以速率 u/i 等於 mu，每粒粒子都一樣。因此吸收了 n 粒粒子之後，木塊的動量就是 nmu，而動量守恆（conservation of momentum）立即給出它的速率。下一粒粒子會否到達，就只是比較兩個速率；而能量損失則是「進入的動能減去最終的動能」。

解答

我們把木塊和各粒子視為在光滑表面上沿同一直線運動的質點，因此沒有水平方向的外力作用，每次碰撞中沿該直線的動量都守恆。由於粒子嵌入木塊，每次碰撞都是完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）。



第 n 次碰撞後的速率

粒子 P_i 的動量為 $im \cdot \frac{u}{i} = mu$，與 i 無關。

假設第 n 粒粒子與木塊相撞。那麼粒子 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ 必定已在它之前相撞：各粒子按次序射出，而且每粒都比前一粒慢（u/i 遞減），所以較後的粒子永遠追不上較前的粒子，而任何粒子都不可能不撞上木塊而越過它。因此在第 n 次碰撞剛完成時，木塊包含了

$P_1, \ldots, P_n$，其質量為

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big).$$

木塊起初靜止，而每粒被吸收的粒子帶來動量 mu，所以由動量守恆，此時總動量為 nmu。因此第 n 次碰撞後木塊的速率 V_n 滿足

$$m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)},$$

此即所求。

當 $2k = N(N+1)$ 時的碰撞次數

經過 n 次碰撞後，木塊以恆定速率 V_n 運動（表面光滑）。位於木塊後方的粒子 P_{n+1} 能追上木塊，當且僅當它嚴格地較快：

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1),$$

其中我們兩邊乘以正數 $n+1$ 及 $2k + n(n+1)$。（當 $n = 0$ 時，此式為 $2k > 0$，這是成立的：P_1 必定會撞上靜止的木塊。）

> **想一想** 一旦有一粒粒子追不上，較後的粒子還有可能撞上木塊嗎？

不可能。若 P_{n+1} 追不上木塊，木塊便永遠保持速率 $V_n \geq \frac{u}{n+1}$，而之後的每粒粒子都更慢，因為對 $i > n+1$ 有 $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$。所以發生碰撞的正好是 $P_1, P_2, \ldots$，直至第一粒追不上的粒子為止。

現在取 $2k = N(N+1)$。P_{n+1} 撞上木塊的條件變為 $n(n+1) < N(N+1)$，即 $n < N$，因為 $n(n+1)$ 在 $n \geq 0$ 時嚴格遞增。所以 $P_1, \ldots, P_N$ 全部撞上木塊，而 P_{N+1} 則不會：當 $n = N$ 時等號成立，而事實上

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1},$$

恰好等於 P_{N+1} 的速率，因此它與木塊之間始終保持固定距離。故此恰好有 N 次碰撞。

損失的動能

只有 $P_1, \ldots, P_N$ 參與碰撞，所以總損失等於這些粒子射出時的動能（kinetic energy）（木塊起初靜止）減去木塊最終的動能。

起初，

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\Big(\frac{u}{i}\Big)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

最終木塊的質量為 $m\big(k+\frac{1}{2}N(N+1)\big) = mN(N+1)$，速率為 $\frac{u}{N+1}$，所以其動能為

$$\tfrac{1}{2}\,mN(N+1)\,\frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\Big(1-\frac{1}{N+1}\Big).$$

相減得

$$\begin{aligned}\text{損失的動能} &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

此即所求結果。

驗算

- $N=1$（$k=1$）：一粒質量為 m、速率為 u 的粒子撞上質量為 m 的木塊，得速率 $\frac{1}{2}u$，損失為 $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$，與 $\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{1}{2}$ 吻合。之後 P_2 的速率同樣是 $\frac{1}{2}u$，永遠不會到達。
- $N=2$（$k=3$）：公式給出損失 $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\,mu^2$。以分數精確地逐步模擬運動（位置及碰撞時刻），得到相同的數值、恰好兩次碰撞，以及與公式吻合的速率 V_n；模擬亦確認了對每個不超過 11 的 N，都恰好有 N 次碰撞，且損失公式成立。
- 單位：損失是質量乘以速率的平方，正是能量應有的單位。

常見錯誤

- 只用第 n 粒粒子的動量，忘記木塊已包含 $P_1,\ldots,P_{n-1}$（或忘記木塊本身的質量 km）。
- 數成 $N+1$ 次碰撞：P_{N+1} 的速率恰好與木塊相同，所以永遠不會接觸木塊。
- 把 $P_{N+1}, P_{N+2},\ldots$ 的動能計入損失；它們從不碰撞，所以並無損失任何動能。

STEP 之外

這木塊是一個在掃集物質時質量不斷增加的物體，與火箭、以及穿過雲層下落的雨點屬同類問題。對於這類變質量系統（variable-mass systems），我們把牛頓（Newton）第二定律以「動量的變化率等於力」的形式應用於整個系統，正如我們逐次碰撞所做的一樣。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細地討論了變質量系統和火箭運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。