詳細解答

STEP II 2012，第 10 題

力學 • 摩擦力與力矩

> **STEP II 2012，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

關鍵思路

桿是圓形橫截面（cross-section）的一條弦（chord），所以每個法向反作用力（normal reaction）都直指圓心 O，而桿與每條半徑之間的夾角 ϕ 由幾何關係決定：$\cos\phi = a/r$。桿唯一可能的運動是繞 O 轉動，因此兩端會一同滑動，而我們也知道每一端的摩擦力（friction）朝哪個方向。對中點取力矩（moments）可消去重量，立即得出第一條關係式；再對 O 取力矩並分解（resolve）一次，便可求得 $\tan\theta$。

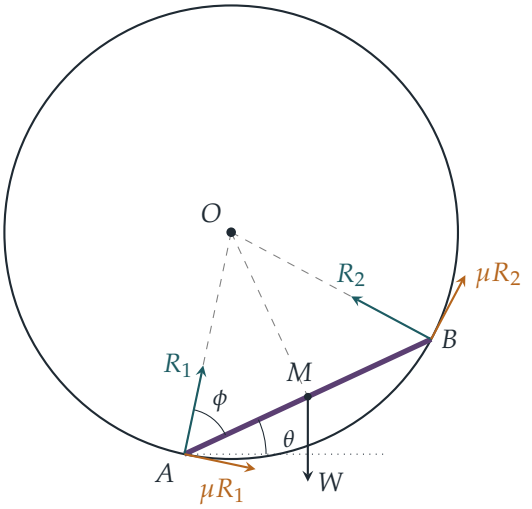
解答

建立模型

把桿視為重量為 W 的均勻剛性桿（uniform rigid rod），只在兩端 A（較低）及 B（較高）與粗糙圓柱接觸。設 O 為圓形橫截面的圓心，M 為 AB 的中點。由於 $OA = OB = r$，三角形 OAB 是等腰三角形（isosceles triangle），所以 OM 垂直於 AB，且

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

其中 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$。桿與半徑之間的夾角在兩端都是 ϕ。



想一想 每一端的摩擦力朝哪個方向？

兩端始終留在圓上，而 AB 的長度不變，所以 OM 的長度保持不變，並一直垂直於桿：唯一可能的運動是繞 O 的轉動。由於 $\theta \neq 0$，M 並不在 O 的正下方，因此重量對 O 有一個力矩，使桿轉向水平（在圖中為順時針：A 會沿壁向上移動，B 則向下移動）。反作用力都經過 O，所以只有摩擦力能抵抗這個轉動。兩端會一同移動，所以在即將滑動時，兩端的摩擦力都達到極限（limiting friction）：μR_1 和 μR_2 分別沿 A 和 B 的切線（tangent）方向作用，兩者相對於 O 都是逆時針方向，如圖所示。

R_1 與 R_2 之間的關係

對 M 取力矩，從而消去重量。R_1 的作用線（line of action）是 AO，它與 AM 成角 ϕ，所以它與 M 的垂直距離是 $a\sin\phi$。A 處的摩擦力沿切線作用，而切線垂直於 OA，所以它與 M 的距離是 $a\cos\phi$。B 處的情況相同。在圖中，R_1 使桿繞 M 順時針轉動，而 R_2 及兩個摩擦力則使桿逆時針轉動，所以

$$R_1\, a\sin\phi = R_2\, a\sin\phi + \mu R_1\, a\cos\phi + \mu R_2\, a\cos\phi.$$

除以 $a\cos\phi$ 並移項整理，得

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

此即所求。特別地，$R_1 > R_2$：較低的一端壓得較用力。

求 $\tan\theta$

對 O 取力矩。反作用力都經過 O，而每個摩擦力的力臂都是 r。重量作用於 M，由於 OM 垂直於桿，它與鉛垂線成角 θ，所以 M 與 O 的水平距離是 $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$。

因此

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

沿垂直於桿的方向分解（指向 O 所在的一側）。每個反作用力與桿成角 ϕ，所以貢獻 $R_i\sin\phi$。每個摩擦力與這個垂直方向成角 ϕ；在 A 處它指離桿上 O 所在的一側，在 B 處則指向該側。重量貢獻 $-W\cos\theta$。所以

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

記 $S = R_1+R_2$。由第一個結果得 $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$，所以 (2) 變為

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

而 (1) 表示 $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$。兩式相除（桿是傾斜而非鉛垂的，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos\theta\neq 0$），得

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

分子分母同乘 r^2，並利用 $r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$、$r^2\cos^2\phi = a^2$：

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

此即所求。

推導 $\lambda<\phi$

> ? **想一想** 手上只有一條等式，不等式從何而來？

來自正負號。桿與水平成角 θ，且 $\theta\neq 0$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\tan\theta>0$。由於 $\mu>0$，分子 μr^2 為正，所以分母也必須為正：

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ 和 λ 都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間為正且遞增，所以由 $\tan\phi>\tan\lambda$ 得 $\lambda<\phi$。

驗算

- 光滑極限：當 $\mu\to 0$ 時，$\tan\theta\to 0$，所以光滑的桿只能水平靜止，且 M 在 O 的正下方。正確。
- 數值：取 $r=5$、$a=3$、$\mu=\frac{1}{2}$，得 $\tan\phi=\frac{4}{3}>\frac{1}{2}$，以及 $\tan\theta=\frac{12.5}{25-11.25}=\frac{10}{11}$。在這個角度（以及數以千計隨機選取的 r,a,μ）下，以向量形式解兩條力的方程

求 R_1, R_2，所得結果使對 O 的力矩為零，並在 10^{-12} 的誤差內滿足 $\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$。

- $\lambda < \phi$ 的物理意義：λ 是摩擦角（angle of friction）。若 $\lambda \geq \phi$，摩擦力足以在任何傾角下支撐着桿，所以桿永遠不會處於即將滑動的狀態，也就不存在這樣的 θ。

常見錯誤

- 把反作用力取為垂直於桿，而不是沿半徑方向：接觸面是圓柱，所以法線是圓柱的法線。
- 把兩個摩擦力沿桿取為相反方向。兩端繞 O 的轉動方向相同，所以兩端的摩擦力相對於 O 都是逆時針方向。
- 為求第一個結果而沿桿及垂直於桿分解：兩條方程都含有 W。對 M 取力矩則可避開它。

STEP 之外

推導 $\lambda < \phi$ 用的正是摩擦錐（friction cone）的概念：粗糙接觸點的總反作用力必須落在與法線成角 λ 的範圍之內。這裏桿在兩點接觸，問題在於兩個摩擦錐是否留有空間，讓三個力交於一點。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）更全面地討論摩擦力及剛體靜力學（rigid-body statics），其中包括需要先判斷即將發生的運動方向的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。