詳細解答

STEP II 2012，第 1 題

純數學 • 二項式級數的係數

> **STEP II 2012，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q1

關鍵思路

每個因子 $(1-x^k)^{-1}$ 都是以 x^k 為公比的幾何級數（geometric series），所以把這些因子相乘，再讀出 x^n 的係數（coefficient），實際上就是在數算把 n 寫成若干容許部分之和的方法數。一旦把係數看成計數，分情況討論便會自然理順；而乘以 $(1-x)^{-1}$，只不過是把一列係數變成它的累積和（running totals）。

解答

通項

由二項式展開（binomial expansion），當 $|y|<1$ 時，$(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$（係數為 $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$）。令 $y=x^6$，

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

因此通項（general term）是 $(r+1)x^{6r}$，而每個指數不是 6 的倍數的 x 冪，其係數都是 0。

第 (i) 部分

另外，$(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$。把兩個級數相乘，每一對滿足 $6r+3s=n$ 的非負整數（non-negative integers）(r,s) 都會產生一項 x^n，貢獻為 $(r+1)\cdot 1$。所以

$$\text{係數，對應}x^n=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}}(r+1).$$

當 $n = 24$ 時，我們需要 $2r + s = 8$，所以 r 可以是 $0, 1, 2, 3, 4$（每個 r 都恰好對應一個 $s = 8 - 2r \geq 0$）。x^{24} 的係數為

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

一般的 n。由於 $6r + 3s$ 必定是 3 的倍數，除非 $3 \mid n$，否則係數為 0。若 $n = 3m$，我們需要 $2r + s = m$，而對每個滿足 $0 \leq 2r \leq m$ 的 r，都恰好有一個合適的 s。因此 r 由 0 取到 $\lfloor m/2 \rfloor$，係數為

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

按 n 除以 6 的餘數分類：

- $n = 6k$（即 $m = 2k$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係數為 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n = 6k + 3$（即 $m = 2k + 1$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係數同樣是 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$：係數為 0。

驗算一下：$n = 24 = 6 \times 4$ 給出 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$，與上面所得相同。

第 (ii) 部分

以 b_n 表示第 (i) 部分求得的 x^n 係數，以 c_n 表示現在要求的係數。由於 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$，

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

所以 $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$，即第 (i) 部分係數的累積和。

> **想一想** 為甚麼乘以 $(1-x)^{-1}$ 會得到累積和？

要在乘積中得到 x^n，我們從第一個級數取 x^j，再從 $1 + x + x^2 + \cdots$ 取 x^{n-j}，而後者的係數永遠是 1。所以每個滿足 $0 \leq j \leq n$ 的 b_j 都恰好在 c_n 中出現一次，權重為 1。

只有 $3 \mid j$ 的 b_j 才不為零，而由第 (i) 部分可知它們成對相等：$b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$，其中 $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$ 是第 p 個三角形數（triangular number）。所以當 $n = 24$ 時，

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

正如題目所要求。

當 $n = 25$ 時，由於 $3 \nmid 25$，多出來的一項 b_{25} 為 0，所以 $c_{25} = c_{24} = 55$。

當 $n = 66 = 6 \times 11$ 時，同樣的規律給出

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

首 p 個三角形數之和是四面體數（tetrahedral number）$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$（可用歸納法（induction）證明，或由曲棍球棒恆等式（hockey-stick identity）得 $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$）。所以 $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$，而 $T_{12} = 78$。因此

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

同樣的論證可得出一般公式：若 $n = 6K + r$ 且 $0 \le r \le 2$，則 $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$；若 $3 \le r \le 5$，則 $c_n = 2\binom{K+3}{3}$。取 $K = 4$，第一條公式給出 $40 + 15 = 55$；取 $K = 11$，則給出 $572 + 78 = 650$。

驗算

第 (ii) 部分中 x^n 的係數，數算的是 $6a + 6b + 3c + d = n$ 的非負整數解的個數（每個因子對應一個幾何級數，$(1 - x^6)^{-2}$ 算作兩個）。用電腦直接數算這些解，對 $n = 24, 25, 66$ 分別得出 55、55 和 650。把級數逐項乘開至 x^{80}，亦證實了兩部分的公式。用人手驗算小的情況也很快：在第 (ii) 部分中，$c_0 = c_1 = c_2 = 1$，$c_3 = c_4 = c_5 = 2$，與 $K = 0$ 時的一般公式吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分遺漏 $n = 6k + 3$ 的情況：3 的奇數倍確實會出現，來自奇數個 x^3 因子。
- 把 $(1 - x^6)^{-2}$ 的通項寫成 $r\,x^{6r}$ 而非 $(r+1)x^{6r}$；常數項是 1，不是 0。
- 把 x^{25} 當作全新的計算：它等於 x^{24} 的係數，因為第 (i) 部分的級數中沒有指數為 25 的項。

STEP 之外

像這樣用作計數工具的冪級數稱為*生成函數*（generating functions）；這裏的乘積數算的是用面值 6、6（另一款設計）、3 和 1 的硬幣支付 n 便士（pence）的方法數。整數分拆（partitions）理論正是從這個想法發展出來的；而答案是隨 n 模 6 而定的分段多項式（piecewise polynomials），這是一個普遍現象（「擬多項式」（quasi-polynomials））。若想讀一本生動的入門書介紹這個方法，可閱讀 Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。