詳細解答

STEP I 2012，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

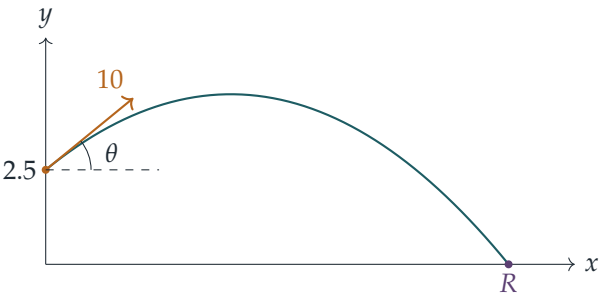
step.maths.org/questions/12-s1-q9

關鍵思路

這是一個從高處拋出的拋射體(projectile)，所以飛行時間(time of flight)由一條關於 t 的二次方程 (quadratic equation) 給出，而題目的重點其實是把它的根改寫成以 $c = \cos 2\theta$ 表示。倍角公式（double-angle formulae）$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$ 和 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ 包辦了所有工作。一旦射程（range）寫成單一變量 c 的函數（function），求它的最大值就只是普通的微積分，只需在平方時稍加小心。

解答

我們把鉛球模擬為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力（air resistance）。取原點在拋射點正下方的地面上，x 軸水平，y 軸鉛直向上，並假設 $0 \leq \theta < 90°$（鉛球向前及向上拋出），因此 $\sin\theta \geq 0$ 而 $\cos\theta > 0$。



飛行時間

水平速度保持為 $10\cos\theta$，而鉛直方向的運動初速為 $10\sin\theta$、加速度為 -10，所以在時間 t 時

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

鉛球在 $y = 0$ 時落地，即當

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

兩根之積為 $-\frac{1}{2} < 0$，所以恰有一個正根，就是取加號的那一個：

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

現在利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1-c)$。由於 $\sin\theta \geq 0$，我們可以寫 $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$，而 $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2-c)$。因此

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

這就是所求的時間（以秒為單位）。

射程

同樣地，$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$，且 $\cos\theta > 0$，所以 $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$。射程為

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right)\ \text{m}. \end{aligned}$$

當 θ 取遍 $[0°, 90°)$ 時，$c = \cos 2\theta$ 取遍 $(-1, 1]$，所以我們要在這個區間上求 R 的最大值。

求射程的最大值

對於 $-1 < c < 1$，求導得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

駐點（stationary point）須滿足

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

想一想 我們可以直接把 $(*)$ 平方嗎？可能會出甚麼問題？

平方可能會引入增根（extraneous roots），因為它丟失了正負號的資訊。兩個分母都是正數，所以在 $(*)$ 中，c 與 $1-2c$ 必須同號（或同時為零，但這是不可能的）。這迫使 $0<c<\frac{1}{2}$，我們要記住這一點。平方並去分母：

$$\begin{aligned} 4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2) \\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4 \\ 5c^2+4c-1 &= 0 \\ (5c-1)(c+1) &= 0. \end{aligned}$$

根 $c=-1$ 不在 $0<c<\frac{1}{2}$ 之內（它對應鉛直向上拋），所以唯一的駐點是 $c=\frac{1}{5}$。它確實滿足 $(*)$：由於 $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 及 $\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$，兩邊都等於 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$。

在這一點

$$R(\tfrac{1}{5})=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

要確認這是最大值，可與區間的端點比較：當 $c\to -1$ 時 $R\to 0$，而 $R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$。由於 R 在 $[-1,1]$ 上連續（continuous），並在區間內部可微（differentiable），其最大值必在端點或駐點取得；而唯一的駐點給出這些值中最大的一個。所以當 $c=\frac{1}{5}$ 時射程最大，得證。（這對應 $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$，比 45° 略小。）

多出的距離

在 45° 時，$c=\cos 90^\circ=0$，所以

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

因此多出的距離是

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

得證。

驗算

- 在 $\theta=0(c=1)$時，時間為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，與一個從 $2.5\,\text{m}$ 高的平台滾落的球所滿足的 $2.5=5t^2$ 吻合。
- 當 $c\to -1$（鉛直向上拋）時，射程趨向 0，理應如此。

- 以數值計算，多出的距離為 $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176\,\text{m}$，只有約 18 cm：最佳點附近非常平坦。對飛行過程作逐步數值模擬，以及對 $R(c)$ 作精細的網格搜尋（grid search），兩者都與公式吻合，並得出最大值位於 $c = 0.2$。

常見錯誤

- 在二次公式中取了減號，得出負的時間。
- 把 $(*)$ 平方後保留了 $c = -1$ 而沒有驗證，或者忘記論證 $c = \frac{1}{5}$ 是最大值而非最小值。
- 假設最佳角度是 45°：這只在拋出點與落地點高度相同時才成立。

STEP 之外

從高處拋出時，最佳角度總是低於 45°；一般而言，最佳角度滿足 $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$，在本題中給出 $\tan\theta = \sqrt{2/3}$，與 $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$ 等價。對帶參數的函數求最優值，並留意最大值附近有多平坦，是敏感度分析（sensitivity analysis）的初步體驗：在最大值附近，參數的微小誤差只會造成二階（second-order）的損失。若想進一步了解有空氣阻力及無空氣阻力的拋射體運動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。