詳細解答

STEP I 2012，第 8 題

純數學 • 齊次微分方程

STEP I 2012，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q8

關鍵思路

兩條方程都是齊次（homogeneous）的：除了一個整體的 x 冪次之外，每一項關於 x 和 y 的總次數都相同。若設 $y = xv$，那個 x 的冪次便會消去，方程隨即分離成 v 的部分和 x 的部分。第 (i) 部分會一步步帶你完成這個過程。第 (ii) 部分則留給你自己處理：把方程除以 x，便可看出它是同一類方程，而之後關於 v 的積分需要用到部分分式（partial fractions）。

解答

第 (i) 部分

若 $y = xv$，由乘積法則（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。代入，得

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

由於 $x \neq 0$，我們可以除以 x^2，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

此即所求。

接着我們分離變數（separate the variables）。方程表明 $xv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$。只要 $v^2 \neq 1$，

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

兩邊乘以 -2 再取指數，得 $|1 - v^2| = Ax^{-4}$，其中 $A > 0$ 為某常數，因此

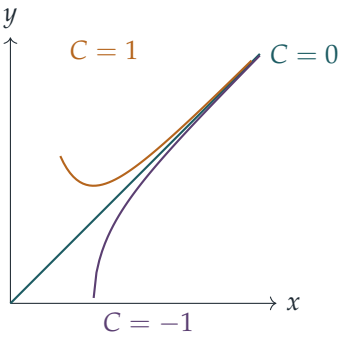
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

其中 $C = \pm A$ 是非零常數。先前擱置的情況 $v = \pm 1$（即 $y = \pm x$）也是解：此時 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ 且 $2v^2 - 2 = 0$。它們恰好就是 $C = 0$ 的情況，所以 C 可以是任何常數。

最後，代入 $v = y/x$：

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

這正是所要求的形式。



上圖展示了第一象限中的幾條解曲線。正如 $y^2 = x^2 + C/x^2$ 所提示，當 $x \to \infty$ 時，它們都趨近直線 $y = x$。

第 (ii) 部分

$6x + 5y$ 中每一項的次數都是 1，$y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的次數也是 1。這提示我們用同樣的代換 $y = xv$：

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

除以 $x \neq 0$ 並整理各項，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v+2)(v+3).$$

想一想 怎樣求 $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$ 的積分？

用部分分式。設 $v = P(v+3) + Q(v+2)$。代入 $v = -2$ 得 $P = -2$，代入 $v = -3$ 得 $Q = 3$。所以

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

只要 $v \neq -2, -3$，分離變數得

$$\int\left(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}\right)\mathrm{d}v = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Longrightarrow\quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

因此 $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$ 是常數。去掉絕對值符號（在一條 $v \neq -3$ 的解曲線上，$x(v+3)^3$ 的正負號不會改變），得

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

現在代入 $v = y/x$。分子是 $x(y+3x)^3/x^3$，分母是 $(y+2x)^2/x^2$，所以 x 的冪次完全消去：

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

其中 K 是常數。

我們排除了的直線也是解。若 $y = -3x$，則 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$ 而 $6x+5y = -9x$，所以方程成立。這條直線就是方框中形式在 $K = 0$ 時的情況。若 $y = -2x$，則 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$ 而 $6x+5y = -4x$，所以這條直線也是解。它不對應任何有限的 K，而是對應 $K \to \infty$。若把解寫成 $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$，則可改為以 $k = 0$ 涵蓋它。

驗算

- 第 (i) 部分：對 $x^2y^2 - x^4 = C$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$。除以 $2x$ 便還原為原方程。
- 第 (ii) 部分：我們從多個隨機起點，以數值方法（Runge–Kutta 方法）逐步求解方程。沿每條解曲線，$(y+3x)^3/(y+2x)^2$ 這個量都保持不變，誤差約為 10^{-14}。例如，通過 $(1,1)$ 的曲線有 $K = 64/9$。
- 每條方程中通過原點的直線解 $y = \pm x$ 和 $y = -2x, -3x$，分別來自 $2v^2 - 2 = 0$ 和 $v^2 + 5v + 6 = 0$ 的根。這是一個好跡象，顯示關於 v 的方程是正確的。

常見錯誤

- 忘記乘積法則：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，而不是 $x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。
- 部分分式算錯（例如寫成 $2/(v+2) - 3/(v+3)$）。可以代入一個值（例如 $v = 0$）檢驗分解是否正確。
- 除以 $1 - v^2$ 或 $(v+2)(v+3)$ 時沒有指出這樣會遺失某些直線解。

STEP 之外

形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ 的方程稱為齊次方程。縮放變換 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ 會把它的解曲線互相映射，這正是 $v = y/x$ 奏效的原因。這是索菲斯・李（Sophus Lie）提出的一個深刻思想的最簡單例子：微分方程（differential equation）的對稱性（symmetry）可以

用來降低方程的階（order）。直線解 $y = mx$ 就是在縮放下保持不變的曲線。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講解了齊次方程及其他一階方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。