詳細解答

STEP I 2012，第 7 題

純數學 • 周期性遞推關係

> **STEP I 2012，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q7

關鍵思路

一個以週期（period）1、2 或 3 重複的數列（sequence），由其首幾項完全決定，所以遞推關係（recurrence relation）只需對一個週期內少數幾組連續三項成立（再加上首尾相接的那幾組）。把這些條件逐一寫出，便得到一組關於 x、y、z 的小型聯立線性方程（simultaneous linear equations）。這組方程有一個不全為零的解，正是這一點迫使 p 和 q 必須滿足所求的條件。整個過程中，$x \neq 0$ 這個事實是我們能夠約去的關鍵。

解答

第 (i) 部分

若對每個 n 都有 $t_n = x$，則遞推關係給出 $x = px + qx$，即 $(p+q-1)x = 0$。由於 $x \neq 0$，得 $p+q=1$。

反過來，若 $p+q=1$ 且 $t_0 = t_1 = x$，則 $t_2 = (p+q)x = x$，由歸納法（induction）可知每一項都等於 x。x 不受任何限制，因此它可以是任何非零實數。

第 (ii) 部分

模式 $x, y, x, y, \ldots$ 滿足遞推關係，當且僅當兩組連續三項 (x, y, x) 和 (y, x, y) 滿足遞推關係：

$$x = py + qx, \qquad \text{即} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$

$$y = px + qy, \qquad \text{即} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相加及相減，得

$$(1-q-p)(x+y)=0, \qquad (1-q+p)(x-y)=0.$$

$x+y$ 和 $x-y$ 不可能同時為零，否則 $x=0$。若 $x+y\neq 0$，則 $p+q=1$；若 $x-y\neq 0$，則 $q-p=1$。因此 $q+p=1$ 和 $q-p=1$ 之中至少有一個成立，得證。

接着推導 x 與 y 之間的關係。

- 若 $q+p=1$，則 $1-q=p$，(1) 變成 $px=py$。所以 $x=y$，前提是 $p\neq 0$。
- 若 $q-p=1$，則 $1-q=-p$，(1) 變成 $-px=py$。所以 $x=-y$，同樣前提是 $p\neq 0$。

唯一的例外是 $p=0$，此時兩種情況都給出 $q=1$。當 $p=0$ 且 $q=1$ 時，遞推關係為 $t_{n+2}=t_n$，任何模式 $x,y,x,y,\ldots$ 都滿足它，因此 x 與 y 之間沒有任何關係。故除非 $p=0$ 且 $q=1$，否則 $x=y$ 或 $x=-y$。

第 (iii) 部分

現在模式是 $x,y,z,x,y,z,\ldots$，我們需要三組連續三項 (x,y,z)、(y,z,x) 和 (z,x,y)：

$$z=py+qx, \tag{3}$$
$$x=pz+qy, \tag{4}$$
$$y=px+qz. \tag{5}$$

利用 (3) 從另外兩條方程中消去 z：

$$\begin{aligned}
&(4):\quad x=p(py+qx)+qy &&\Longrightarrow\quad (pq-1)x+(p^2+q)y=0,\\
&(5):\quad y=px+q(py+qx) &&\Longrightarrow\quad (p+q^2)x+(pq-1)y=0.
\end{aligned}$$

把第一條方程乘以 $pq-1$，第二條乘以 p^2+q，然後相減。含 y 的項互相抵消，剩下

$$\left[(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)\right]x=0.$$

想一想 為甚麼括號內的式子必須為零？這組方程會不會根本沒有解？

它們確實有解：數列存在，所以 x 和 y 同時滿足兩條方程。而 $x\neq 0$，所以可以除以 x。展開括號，

$$\begin{aligned}
(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)&=p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\
&=1-3pq-p^3-q^3,
\end{aligned}$$

所以 $p^3+q^3+3pq-1=0$，得證。

因式分解(factorisation)。這個式子是 $a^3+b^3+c^3-3abc$，其中 $a=p$、$b=q$、$c=-1$，而標準恆等式（identity）

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

給出

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

（如果記不起這個恆等式，可以展開來驗證：方括號等於 $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$，再乘以 $p+q-1$ 便還原為原來的三次式。）乘積為零，所以 $p+q=1$ 或 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。

情況 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。實數平方之和為零，當且僅當每個平方都為零，所以 $p=q=-1$。此時 (3) 變成 $z=-y-x$，即 $x+y+z=0$。

情況 $p+q=1$。把 $q=1-p$ 代入 (3)、(4) 和 (5)，並把每條整理成差的形式：

$$z-x=p(y-x),\qquad x-y=p(z-y),\qquad y-z=p(x-z).$$

設 $a=y-x$、$b=z-y$、$c=x-z$，於是 $a+b+c=0$。第一條和第三條方程表示 $c=-pa$ 及 $b=-pc=p^2a$。於是

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

> ? **想一想** $1-p+p^2$ 可以為零嗎？

不可以：對每個實數 p，$1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$。所以 $a=0$，由此 $c=-pa=0$，進而 $b=0$。即 $x=y=z$。

兩種情況不會重疊，因為 $p=q=-1$ 給出 $p+q=-2\neq 1$。所以 $x=y=z$（當 $p+q=1$ 時）或 $x+y+z=0$（當 $p=q=-1$ 時）。兩者都確實會出現：在第二種情況中，遞推關係 $t_{n+2}=-t_{n+1}-t_n$ 對任何初始值都給出 $x,\ y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots$。

驗算

- 取 $p=q=-1$、$t_0=2$ 及 $t_1=5$，數列為 $2,5,-7,2,5,-7,\ldots$，而 $2+5-7=0$。
- 取 $p=3$ 及 $q=4$（所以 $q-p=1$），由 $1,-1$ 開始得 $t_2=-3+4=1$ 及 $t_3=3-4=-1$，正如第 (ii) 部分所預測般交替出現。
- 當 $p=2$、$q=-1$ 時，三次式給出 $8-1-6-1=0$，與 $p+q=1$ 一致。我們亦在 1000 組隨機 (p,q) 上驗證了展開式、因式分解，以及三次式與 (3)–(5) 的 3×3 行列式（determinant）一致。模擬遞推關係亦證實了上述每一種情況。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分斷定 $p+q=1$ 及 $q-p=1$ 同時成立。論證只表明至少有一個成立；兩者同時成立只在例外情況 $p=0$、$q=1$ 中發生。
- 在第 (ii) 部分除以 p，卻沒有察覺 $p=0$ 正是題目所問的例外情況。
- 忘記首尾相接的方程 (4) 和 (5)。每個週期只用一條方程，不足以迫出所求的條件。

STEP 之外

處理 $t_{n+2}=pt_{n+1}+qt_n$ 的標準方法是透過*特徵方程*（characteristic equation）$\lambda^2=p\lambda+q$：一般而言 $t_n=A\alpha^n+B\beta^n$，其中 α 和 β 是它的根。一個數列每 k 步重複一次，當且僅當它所用到的根滿足 $\lambda^k=1$。常數數列需要根 1（所以 $p+q=1$），交替數列需要根 -1（所以 $q-p=1$）。情況 $p=q=-1$ 給出 $\lambda^2+\lambda+1=0$，其根是複數單位立方根（cube roots of unity），這正是為甚麼它們的和 $1+\omega+\omega^2=0$ 會以 $x+y+z=0$ 的形式重現。這其實是喬裝了的線性代數（linear algebra）（作用於數列上的移位映射（shift map）），而斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是以這種方式，透過特徵值（eigenvalues）來處理遞推關係。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。