詳細解答

STEP I 2012，第 6 題

純數學 • 三角不等式

> **STEP I 2012，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q6

關鍵思路

這裏每個仰角（angle of elevation）的對邊都是同一條旗桿，所以每個餘切（cotangent）都只是一段水平距離除以旗桿高度。這樣，第一個結果就變成關於圓中線段長度的事實：$DC^2 = AD \cdot DB$，因為半圓上的圓周角（angle in a semicircle）是直角。三角恆等式（trigonometric identity）把 $\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$ 化成一個能直接看出正負號的式子。得到這個不等式後，幾何部分幾乎不費吹灰之力就給出最後的結果。

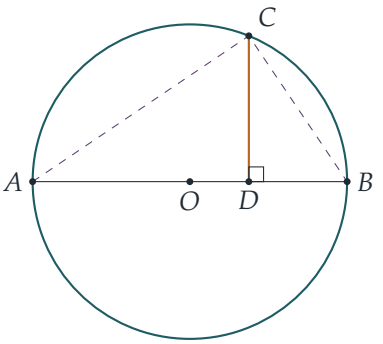
解答

幾何結果

設旗桿高度為 $h > 0$，頂端為 T，因此 DT 是鉛垂的。A、B、C 都在地面上，所以三角形 TDA、TDB、TDC 在 D 處都是直角。因此

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

由於 α 和 β 都是銳角，D 既不是 A 也不是 B（從這兩點中任何一點看，仰角都會是直角），所以 D 嚴格位於 A 與 B 之間，且 $DC > 0$。



現在看地面平面圖。設 O 為圓心，r 為半徑，$x = OD$（以指向 B 的方向為正，所以 $-r < x < r$）。於是 $AD = r + x$，$DB = r - x$，而在三角形 ODC 中應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），得 $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$。因此

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

（等價地說：$\angle ACB$ 是半圓上的圓周角，所以是直角，而 CD 是直角三角形 ACB 的高（altitude）。）兩邊除以 h^2，

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

得證。

恆等式

記 $s = \frac{1}{2}(p + q)$，並利用二倍角公式（double-angle formulae）的形式 $\sin^2 s = \frac{1}{2}(1 - \cos(p + q))$ 及 $\cos^2 s = \frac{1}{2}(1 + \cos(p + q))$。左邊變成

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q(1 - \cos(p + q)) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q(1 + \cos(p + q)) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\cos p \cos q - \sin p \sin q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(\cos p \cos q + \sin p \sin q) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\cos(p + q)$ 和 $\cos(p - q)$ 的複角公式（compound-angle formulae）。此式對所有 p 和 q 都成立。

不等式

把恆等式的右邊因式分解：

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)(1 - \cos(p - q)).$$

現設 $p, q > 0$ 且 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$。於是 $0 < p + q \leq \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(p + q) \geq 0$；而 $1 - \cos(p - q) \geq 0$ 永遠成立。所以右邊非負，從而

$$\cos p \cos q \sin^2 s \;\geq\; \sin p \sin q \cos^2 s.$$

想一想 我們可以放心地把兩邊除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 嗎？

可以：由於 p 和 q 都是正數，且兩者之和不超過 $\frac{1}{2}\pi$，所以 p、q 和 s 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內，因此 $\sin p$、$\sin q$ 和 $\sin s$ 都嚴格為正。除以正數 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 不會改變不等號的方向：

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

等號成立當且僅當 $p = q$ 或 $p + q = \frac{1}{2}\pi$。

最後結果

取 $p = \alpha$、$q = \beta$。兩者都是正數（它們是一條高度為正的旗桿的仰角），且 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$，所以上述不等式適用。結合第一個結果，

$$\cot^2 \phi = \cot \alpha \cot \beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ 和 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內（ϕ 是因為 $DC > 0$ 且 $h > 0$），所以兩個餘切都是正數，可以開平方：$\cot \phi \geq \cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

想一想 為甚麼這給出的是 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，而不是 $\geq$？

因為 cot 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上是嚴格遞減（decreasing）的：餘切越大，角就越小。因此

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{只要} \alpha + \beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

驗算

- 若 $D = O$，則 $AD = DB = DC = r$，所以 $\alpha = \beta = \phi$：第一個結果的兩邊相等，而最後的不等式取等號，與 $p = q$ 的情況吻合。
- 數值測試：取 $r = 1$、$OD = \frac{1}{2}$、$h = 1$，得 $\cot \alpha = 1.5$、$\cot \beta = 0.5$、$\cot^2 \phi = 0.75$，與預期一致。這裏 $\alpha + \beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$，所以最後結果不一定適用；事實上 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$，說明條件是必要的。
- 我們在 10^5 組隨機的 (p, q) 上驗證了恆等式，在容許範圍內 2×10^5 組隨機數對上驗證了不等式，並在約 8×10^4 個滿足 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$ 的隨機配置中驗證了 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，全部沒有出錯。

常見錯誤

- 忘記 cot 是遞減的，因而得出 $\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

- 把不等式除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$，卻沒有說明它為何是正數。
- 忽略條件 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$：正是這個條件保證 $\cos(p+q) \geq 0$；沒有它，不等式可以不成立。

STEP 之外

這個不等式說明 $\ln\cot t$ 在 $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 上是凸函數（convex function），因為它表示 $\ln\cot p$ 與 $\ln\cot q$ 的平均值不小於兩者平均值處的 $\ln\cot$ 值。凸性與琴生不等式（Jensen's inequality）是大學一年級分析學中不等式的一個強大來源。關係式 $DC^2 = AD \cdot DB$ 正是歐幾里得（Euclid）作幾何平均數（geometric mean）的方法：$\cot\phi$ 是 $\cot\alpha$ 與 $\cot\beta$ 的幾何平均數。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）討論了凸函數，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）則有更多這類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。