詳細解答

STEP I 2012，第 5 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2012，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q5

關鍵思路

頭兩個積分都可以用標準方法處理。把 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 寫出來，便看出 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的導數（derivative）的相反數，所以代換（substitution）$u = \cos x$ 行得通。至於第二個積分，對數（logarithm）是麻煩的因子，因此我們用分部積分（integration by parts），透過求導把它消去。最後一個積分中，$\cos x + \sin x$ 其實是一個「喬裝」的餘弦：$\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$。把變量平移 $\frac{1}{4}\pi$，積分區間便變成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，而被積函數（integrand）則變成剛才求得的兩個積分的組合。

解答

第一個積分

記第一個積分為 I_1。由於 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，代入 $u = \cos x$，於是 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$。當 $x = 0$ 時 $u = 1$；當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$。所以

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u\ln u\,\mathrm{d}u,$$

其中 $\mathrm{d}u$ 帶來的負號已用來對調上下限。用分部積分（對 $\ln u$ 求導，對 $2u$ 積分），

$$\int 2u\ln u\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

在 $u = 1$ 處，其值為 $-\frac{1}{2}$。在 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 處，有 $u^2 = \frac{1}{2}$ 及 $\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$，所以其值為 $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$。因此

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

與所求相符。

第二個積分

記第二個積分為 I_2。我們用分部積分，對 $\ln(\cos x)$ 求導，對 $\cos 2x$ 積分。$\cos 2x$ 的一個方便的原函數（antiderivative）是 $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$，而 $\ln(\cos x)$ 的導數是 $-\sin x / \cos x$。所以

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

想一想 為甚麼選用 $\sin x \cos x$，而不直接寫成 $\frac{1}{2}\sin 2x$？

兩者是同一個函數，但寫成 $\sin x \cos x$ 的形式時，因子 $\cos x$ 會與 $\ln(\cos x)$ 的導數分母中的 $\cos x$ 互相抵消，剩下容易計算的 $\sin^2 x$ 的積分。

邊界項（boundary term）是 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$。利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$，

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

所以

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\left(\pi - 2\ln 2 - 2\right) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

與所求相符。

最後一個積分

記最後一個積分為 I。由複角公式（compound-angle formula），

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

這提示我們使用代換 $t = x - \frac{1}{4}\pi$，它把區間 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 變成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，即 I_1 和 I_2 的積分區間。由 $2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$，

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

以及

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

這是成立的，因為在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\cos t > 0$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\, \mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

餘下的積分等於零：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

所以，利用上面兩個結果，

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

驗算

用辛普森法則（Simpson's rule）算得 $I_1 \approx -0.076713$、$I_2 \approx -0.030588$ 及 $I \approx 0.046125$，與 $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$、$\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$ 及 $\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$ 吻合至小數點後十位。對第一個積分作一個快速的正負號檢查：在 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上有 $\sin 2x > 0$ 及 $\ln(\cos x) < 0$，所以 I_1 必定是負數，而 $\ln 2 - 1 < 0$ 正好如此。

常見錯誤

- 在 I_2 的分部積分中漏掉邊界項。它在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處並不為零。
- 把 $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 和 $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 的正負號弄反，結果得到 $I_1 - I_2$ 或 $I_1 + I_2$，而不是 $I_2 - I_1$。
- 把 $\ln\sqrt{2}$ 帶來的常數 $\frac{1}{2}\ln 2$ 直接丟掉，卻沒有檢查它的係數積分後是否為零。

STEP 之外

$\ln(\cos x)$ 和 $\ln(\sin x)$ 的積分是經典題材：同樣的對稱技巧可以得出著名的結果 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$；而在一般的積分區間上，它們會引出克勞森函數（Clausen function）和卡塔蘭常數（Catalan's constant）。在大學一年級的分析（analysis）課程中，你還要檢查當對數在端點處趨於無窮時，這類積分是否有定義，這使它們成為反常積分（improper integral）。如想多做這類練習，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。