詳細解答

STEP I 2012，第 4 題

純數學 • 切線與法線

> **STEP I 2012，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q4

關鍵思路

一切都源於 $y = \frac{1}{2x}$ 的斜率（gradient），再加上細心的消元（elimination）。當我們求兩條只差在把 p 與 q 互換的直線的交點時，把兩條方程相減，總會得出一個因子 $p - q$；由於兩點相異，我們可以把它約去。在特殊情況下，值得留意條件對 Q 的影響：它令 Q 成為 P 關於直線 $y = x$ 的鏡像（mirror image），而這種對稱性（symmetry）正好解釋了為何 T 和 N 都落在這條直線上。

解答

點 T

在 C 上有 $y = \dfrac{1}{2x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$。因此 P 點的切線（tangent）斜率為 $-\frac{1}{2p^2}$，方程為

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

兩邊乘以 $2p^2$，得 $2p^2y - p = -x + p$，即

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

同理，Q 點的切線為

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

以 (1) 減去 (2)，

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

由於兩點相異，$p \neq q$，所以可以除以 $2(p-q)$，得 $(p+q)y = 1$。因為 $p, q > 0$，所以 $p+q \neq 0$，故

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

代入 (1)，

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

所以 T 是點 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$，正如所求。

當 $pq = \frac{1}{2}$ 時的點 N

P 點的法線（normal）與切線垂直，所以其斜率為 $2p^2$，方程為

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

同樣地，Q 點的法線為 $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$。令兩個 y 的表達式相等：

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

除以 $2(p-q) \neq 0$，

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

這對任何相異的 p 和 q 都成立。現在運用 $pq = \frac{1}{2}$，於是 $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$，右邊變成

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

因此 $x = p + q$。代入 (3)，

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

這裏兩次用到 $2pq = 1$：$2p^2 q = p(2pq) = p$，以及 $\frac{1}{2p} = q$。因此

$$N = (p+q,\ p+q).$$

（注意 $p \neq q$ 加上 $pq = \frac{1}{2}$，意味着 $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$，這是對 p 的唯一限制。）

想一想 為甚麼 T 和 N 偏偏會落在 $y = x$ 上？

當 $pq = \frac{1}{2}$ 時，有 $\frac{1}{2q} = p$ 及 $\frac{1}{2p} = q$，所以 $P = (p, q)$、$Q = (q, p)$。曲線 $xy = \frac{1}{2}$ 在關於 $y = x$ 的反射下保持不變，而這個反射把 P 和 Q 互換。因此它把兩條切線互換，也把兩條法線互換，於是每個交點都被映射到自身；而被這個反射固定的點必定在 $y = x$ 上。代數計算正好印證了這一點。

T 與 N 在 $y=x$ 上，以及距離之積

由於 $2pq=1$，T 的結果給出

$$T=\left(\frac{1}{p+q},\frac{1}{p+q}\right),$$

它在 $y=x$ 上；而我們已求得 $N=(p+q,\,p+q)$，它同樣在 $y=x$ 上。

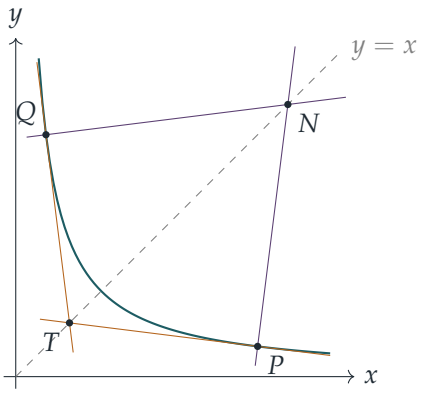
一點 (a,a)（其中 $a>0$）與原點的距離為 $\sqrt{2}\,a$。由於 $p+q>0$，

$$OT=\frac{\sqrt{2}}{p+q},\qquad ON=\sqrt{2}\,(p+q),$$

所以

$$OT\cdot ON=2,$$

這是常數（與 p 無關），正如所求。



圖中顯示 $p=2$、$q=\frac{1}{4}$ 的情況：琥珀色為切線，梅紫色為法線。

驗算

取 $p=2$、$q=\frac{1}{4}$，則 $pq=\frac{1}{2}$。切線為 $x+8y=4$ 和 $8x+y=4$，交於 $\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$，與 $\frac{1}{p+q}=\frac{4}{9}$ 吻合。法線為 $y=8x-\frac{63}{4}$ 和 $y=\frac{x}{8}+\frac{63}{32}$，交於 $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$，與 $p+q=\frac{9}{4}$ 吻合。於是 $OT\cdot ON=\frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}=2$。我們亦以精確的有理數運算，對 2000 組隨機選取的 p 和 q 驗證了 T 的一般公式，以及特殊情況下的兩個結果。

常見錯誤

- 除以 $p-q$ 時沒有說明為何可以這樣做：「相異的點」這個條件正是用在這裏。

- 求 N 時，在 $\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$ 中弄錯正負號。
- 在聲稱 T 位於 $y = x$ 上之前，忘記用 $pq = \frac{1}{2}$ 化簡 T。

STEP 之外

直角雙曲線（rectangular hyperbola）$xy = c^2$ 是一種圓錐曲線（conic）；而 $OT \cdot ON$ 為常數這一事實，說明了 T 和 N 是關於圓 $x^2 + y^2 = 2$ 的反演點（inverse points）。關於圓的反演（inversion）是幾何學以及複分析（complex analysis）中一種威力強大的變換；在複分析中，它以映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 的形式出現。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）對反演及其幾何性質有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。