詳細解答

STEP I 2012，第 3 題

純數學 • 由面積推導不等式

> **STEP I 2012，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q3

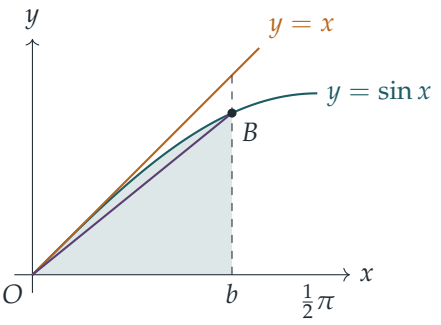
關鍵思路

一條始終朝同一方向彎曲的曲線，總是位於它每一條切線（tangent）的同一側，並位於它每一條弦（chord）的另一側。因此，曲線下的面積被夾在切線下的面積與弦下的面積之間，而這兩個面積都不過是三角形或梯形（trapezium）的面積。把每個面積準確地寫出來，不等式便自然得出；真正需要花心思的，只是決定該用哪一條切線和哪一條弦。

解答

第 (i) 部分

在 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 上，我們有 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$，所以曲線 $y = \sin x$ 在該區間上是凹（concave）的：它向下彎曲。原點處的切線斜率（gradient）為 $\cos 0 = 1$，所以切線就是直線 $y = x$。由 O 到 $B = (b, \sin b)$ 的弦是直線 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$。



凹性的意思是：在 O 與 B 之間，曲線嚴格位於弦的上方；而當 $x > 0$ 時，曲線嚴格位於 O 處切線的下方。所以，當 $0 < x < b$ 時，

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

現在比較在 $0 \le x \le b$ 上的三個面積。

- 曲線下的面積（陰影部分）：$\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b.$
- 切線下的面積：一個底為 b、高為 b 的直角三角形，面積為 $\frac{1}{2}b^2$。
- 弦下的面積：一個底為 b、高為 $\sin b$ 的三角形，面積為 $\frac{1}{2}b\sin b$。

由於在 $0 < x < b$ 上曲線嚴格位於兩條直線之間（而且三者都是連續的），這些面積滿足嚴格不等式：

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1 - \cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

右邊的不等式可整理為 $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$，左邊的則可整理為 $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$。合起來便得

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

設 $k = \ln a$；由於 $a > 1$，所以 $k > 0$，而且 $a^x = \mathrm{e}^{kx}$。於是

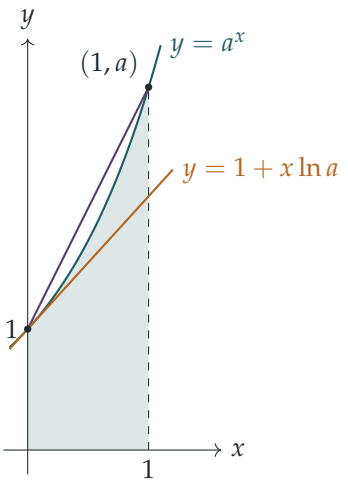
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

所以這條曲線是凸（convex）的：它向上彎曲。現在兩者的角色對調：曲線嚴格位於它的弦的下方，並嚴格位於它的切線的上方（切點除外）。

想一想 我們應該在哪個區間上比較面積？

答案應該只涉及 $\ln a$ 和 a，而不涉及其他量。區間 $0 \le x \le 1$ 恰好做到這一點：曲線的兩個端點是 $(0,1)$ 和 $(1,a)$，而曲線下的面積是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



下界（弦）。由 $(0,1)$ 到 $(1,a)$ 的弦在 $0<x<1$ 上位於曲線上方，而它下方的區域是一個寬為 1、兩條平行邊分別為 1 和 a 的梯形，面積為 $\frac{1}{2}(1+a)$。因此

$$\frac{a-1}{\ln a}<\frac{a+1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln a>\frac{2(a-1)}{a+1},$$

這裏我們兩邊同乘正數 $2\ln a/(a+1)$，所以不等號方向不變。

上界（切線）。$(0,1)$ 處的切線斜率為 $k=\ln a$，所以切線是 $y=1+kx$。當 $x>0$ 時它位於曲線下方，而它在 $[0,1]$ 上的下方面積是一個兩條平行邊分別為 1 和 $1+k$ 的梯形，面積為 $1+\frac{1}{2}k$。因此

$$1+\tfrac{1}{2}k<\frac{a-1}{k}.$$

兩邊乘以 $2k>0$：

$$2k+k^2<2a-2 \quad\Longleftrightarrow\quad k^2+2k+1<2a-1 \quad\Longleftrightarrow\quad (k+1)^2<2a-1.$$

? **想一想** 我們可以直接開平方嗎？

可以，但只因為兩邊都是正數：$2a-1>1>0$，而且由於 $k>0$，所以 $k+1>0$。對正數而言，$u^2<v^2$ 可推出 $u<v$，所以 $k+1<\sqrt{2a-1}$，即

$$\frac{2(a-1)}{a+1}<\ln a<-1+\sqrt{2a-1},$$

證明完畢。

驗算

- 第 (i) 部分取 $b=1$：$1-\frac{1}{2}=0.5$，$\cos 1\approx 0.5403$，而 $1-\frac{1}{2}\sin 1\approx 0.5793$。大小次序正如所述。

- 第 (ii) 部分取 $a = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.6667$，$\ln 2 \approx 0.6931$，而 $\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$。次序同樣正確。
- 當 $a \to 1$ 時，第 (ii) 部分的三個式子都趨於 0，而且彼此愈夾愈緊：在 $a = 1.01$ 時，它們準確至小數點後五位都相同。這很合理，因為在很短的範圍內，一條光滑曲線幾乎是直的。
- 我們在數以千計的隨機值上驗算了兩串不等式，並用辛普森法則（Simpson's rule）驗算了面積公式。

常見錯誤

- 把位置的上下弄反：正弦曲線是凹的（位於切線下方、弦上方），而 a^x 是凸的（情況相反）。應該用二階導數（second derivative）而不是草圖來證明這一點。
- 用 $\ln a$ 乘或除不等式時，忘記 $\ln a > 0$ 這一條件。
- 對 $(k+1)^2 < 2a - 1$ 開平方時，沒有檢查 $k + 1 > 0$。

STEP 之外

這些弦的界是一個一般原理的特例：對於凸函數，它在一個區間上的平均值介乎區間中點的函數值與兩端點函數值的平均之間（這就是埃爾米特（Hermite）–阿達馬（Hadamard）不等式；若改用中點處而非端點處的切線，便可得到更精確的下界）。第 (ii) 部分的下界說明，a 與 1 的對數平均（logarithmic mean）$(a-1)/\ln a$ 小於它們的算術平均（arithmetic mean）；這個事實在整個分析學以至物理學中都屢屢出現。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對凸函數和積分估計有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。