詳細解答

STEP I 2012，第 2 題

純數學 • 曲線描繪與根

> **STEP I 2012，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q2

關鍵思路

數 $p(x) = 0$ 的實根（real roots）個數，等同於數 $y = p(x)$ 的圖像與 x 軸相交多少次；又或者把常數項移到另一邊之後，數一條固定曲線與一條水平直線相交多少次。因此整道題的關鍵在於掌握一條四次曲線（quartic）的形狀：它在哪裏轉向，以及轉向時有多高或多低。第 (i) 部分中，這個四次多項式是一個完全平方；第 (ii) 部分中，關於導數的條件令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以因式分解並帶有一個重根（repeated root），結果只剩下一個轉向點（turning point）。

解答

第 (i) 部分

首先留意

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

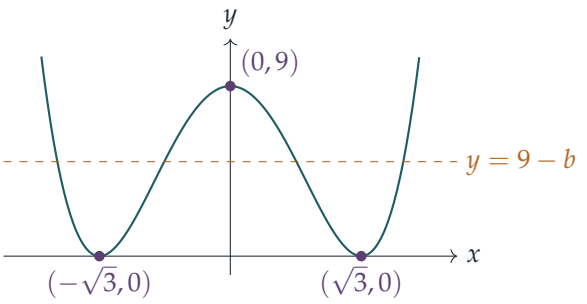
所以處處都有 $y \geq 0$，而且 $y = 0$ 恰好在 $x = \pm\sqrt{3}$ 時成立。這條曲線是偶函數（even function）的圖像（關於 y 軸對稱），並在 $(0, 9)$ 與 y 軸相交。求導，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

它在 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3}$ 時等於零。因此駐點（stationary points）為

$$(0, 9)\text{（局部極大值）}, \qquad (\sqrt{3}, 0) \text{ 及 } (-\sqrt{3}, 0)\text{（極小值）}.$$

極小值是顯然的，因為 $y \geq 0$ 而在這兩點 $y = 0$；又 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12$ 在 $x = 0$ 時等於 $-12 < 0$，所以該點是極大值。當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to +\infty$。這條曲線是一個「W」形，在 $x = \pm\sqrt{3}$ 處與 x 軸相切。



至於根的個數，在等式兩邊同時加上 9：

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

因此 n 就是水平直線 $y = 9 - b$ 與剛才所繪曲線的交點個數。讓這條直線由高至低移動，從圖中讀出：

- $9 - b > 9$，即 $b < 0$：直線在極大值之上，只與外側兩支相交，所以 $n = 2$。
- $9 - b = 9$，即 $b = 0$：直線穿過極大值點，得到 $x = 0$ 及外側兩點；事實上 $x^2(x^2 - 6) = 0$ 給出 $x = 0, \pm\sqrt{6}$。所以 $n = 3$。
- $0 < 9 - b < 9$，即 $0 < b < 9$：直線與四段單調（monotonic）部分各相交一次，所以 $n = 4$。
- $9 - b = 0$，即 $b = 9$：直線只在兩個極小值點 $x = \pm\sqrt{3}$ 處與曲線相切，所以 $n = 2$。
- $9 - b < 0$，即 $b > 9$：直線位於曲線下方，所以 $n = 0$。

綜合以上：

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$：不存在這樣的b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ 或$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$ 不可能出現，也可由對稱性得出：若 x 是根，則 $-x$ 也是根，所以唯一的根必須是 $x = 0$，這迫使 $b = 0$，但此時共有三個根。

第 (ii) 部分

現在 $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

二階導數只在 $x = \pm 1$ 時等於零。在 $x = 1$ 時一階導數為 $a - 8$，在 $x = -1$ 時則為 $a + 8$。所以兩者在同一點同時等於零，當且僅當

$$a = 8 \text{ (在} x = 1\text{)} \qquad \text{或} \qquad a = -8 \text{ (在} x = -1\text{)}.$$

情況 $a = 8$。此時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

我們之所以找到因式 $(x-1)^2$，是因為我們刻意令 $x = 1$ 同時是 y' 和 y'' 的根，即 y' 的重根。

想一想 這條曲線實際上有多少個轉向點？

由於 $(x-1)^2 \geq 0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的正負號與 $x+2$ 的正負號相同。所以 y 在 $x < -2$ 時嚴格遞減，在 $x > -2$ 時嚴格遞增（斜率在 $x = 1$ 時為零，但不變號：那是一個駐拐點（stationary point of inflection），而不是轉向點）。曲線只有一個轉向點，就是在 $x = -2$ 處的全局極小值（global minimum），其值為

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

一條先下降到唯一的極小值再上升的曲線，若極小值在 x 軸之下，便與 x 軸相交兩次；若極小值剛好在軸上，便相交一次（相切）；若在軸之上，則完全不相交。因此相異實根的個數為

$$\begin{cases} 2 & \text{若} b < 24, \\ 1 & \text{若} b = 24, \\ 0 & \text{若} b > 24. \end{cases}$$

（當 $b = 24$ 時，可以直接看到重根：$x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$，而該二次式的判別式（discriminant）為 $16 - 24 < 0$。）

情況 $a = -8$。以 $-x$ 代替 x，可把 $x^4 - 6x^2 - 8x + b$ 變成 $x^4 - 6x^2 + 8x + b$，所以這條曲線是前一條曲線關於 y 軸的反射。唯一的極小值現在位於 $x = 2$，其值為 $b - 24$，而根的個數相同：$b < 24$ 時為 2，$b = 24$ 時為 1，$b > 24$ 時為 0。

第 (iii) 部分

取 $y = x^4 - 6x^2 + ax$，其中 $a > 8$。

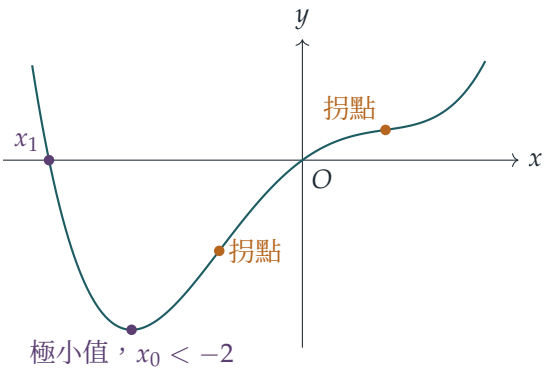
駐點。 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 即 $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$。三次函數 $g(x) = x^3 - 3x$ 有局部極大值 $g(-1) = 2$ 及局部極小值 $g(1) = -2$，而且 $g(-2) = -2$。由於 $-\frac{a}{4} < -2$，高度為 $-\frac{a}{4}$ 的水平直線位於 g 的局部極小值之下，所以它與 g 恰好相交一次，交點在 $x < -2$ 的左支上。因此恰好有一個駐點，位於某個 $x_0 < -2$。該點左邊斜率為負，右邊斜率為正，所以它是極小值。

與 x 軸的交點。 $y = x(x^3 - 6x + a)$，所以 $x = 0$ 是其中一個交點，其餘交點是 $h(x) = x^3 - 6x + a$ 的根。這個三次函數在 $x = \sqrt{2}$ 處取局部極小值，而 $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$，因為 $a > 8 > 4\sqrt{2}$。所以 h 只有一個實根，又因 $h(0) = a > 0$，這個根是負數。事實上

$h(-2) = a + 4 > 0$，而 h 在 $x < -\sqrt{2}$ 時遞增，所以這個根 x_1 滿足 $x_1 < -2$。曲線在 x_1 和原點與 x 軸相交，兩者之間曲線取負值；極小值就位於這個區間內。

其他特徵。在原點處斜率為 $a > 0$。二階導數 $12(x^2 - 1)$ 在 $x = \pm 1$ 處變號，所以在 $(-1, -a - 5)$ 及 $(1, a - 5)$ 有拐點（points of inflection）；這兩點的斜率分別為 $a + 8$ 及 $a - 8$，均為正數，所以曲線經過這兩點時仍在上升。曲線在 $-1 < x < 1$ 上向下凹（concave down），在此區間以外向上凹。當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to +\infty$。

下圖展示 $a = 10$ 的情況，此時 $x_0 \approx -2.05$，極小值約為 -28，而 $x_1 \approx -3.05$。



驗算

- 在第 (i) 部分，$b = 5$ 應給出四個根：$x^2 = 3 \pm 2$，所以 $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$。結果吻合。
- 在第 (ii) 部分，$b = 24$ 給出因式分解 $(x + 2)^2(x^2 - 4x + 6)$，證實在極小值處只有一個（二重）根。
- 數值上，我們對 0、9 及 24 兩側的許多 b 值求出這些四次多項式的全部複數根，並數出其中相異的實根；每一個結果都吻合。對於 8 與 200 之間的隨機 a，第 (iii) 部分的曲線總是只有一個駐點及兩個與 x 軸的交點，並且 $x_1 < x_0 < -2$。當 $a = 10$ 時，$x_0 \approx -2.054$，$y(x_0) \approx -28.05$。

常見錯誤

- 把 $x = \pm\sqrt{3}$ 處的重根（當 $b = 9$ 時）算作四個根：題目問的是相異的 x 值。
- 把第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 的點當作轉向點。由於 y' 在該處有一個平方因式，其正負號不會改變，所以它是駐拐點。
- 遺漏 $a = -8$：$y'' = 0$ 有兩個解，每個解都給出一個 a 值。

STEP 之外

當 b 經過 0、9 或 24 時實根個數的跳變，是分岔（bifurcation）的一個小例子：只有當水平直線經過某個駐值時，答案才會改變。第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 這個特殊情況，正是兩個駐點合併並消失之處，這是最簡單的「突變」（catastrophe），即摺疊型突變（fold），也是為甚麼一旦 $a > 8$，第 (iii) 部分的四次曲線便只有一個轉向點。同樣的推理，借助介值定理（intermediate value theorem）和單調性加以嚴格化，就是實分析（real analysis）的起點；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是看到這套推理被仔細展開的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。