詳細解答

STEP I 2012，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP I 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q12

關鍵思路

一切取決於滅火筒在哪一年出現故障，所以先把概率密度函數（probability density function）化為累積分布函數（cumulative distribution function），從而讀出故障在第一、第二及第三年出現的概率。一旦知道是哪一年，各次測試就只是一連串互相獨立（independent）的「通過」，最後接一次「不通過」。最後一部分是條件概率（conditional probability），而「在 18 個月時已有故障」這個事件，同樣是關於 T 落在哪個區間的陳述。

解答

T 的分布

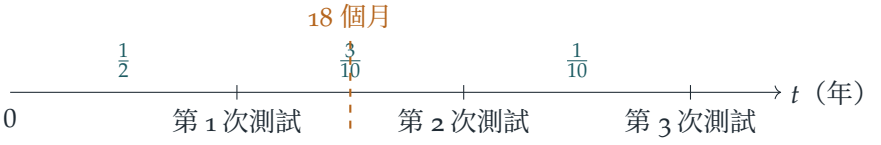
對 $t \geq 0$，代入 $u = 1 + s^2$（於是 $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$），

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以 $F(1) = \frac{1}{2}$，$F(2) = \frac{4}{5}$，$F(3) = \frac{9}{10}$，而

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

由於 T 是連續（continuous）隨機變量，故障恰好在測試當日出現的概率為零，所以不必擔心端點處用的是 $<$ 還是 $\leq$。



恰好在製造後三年被銷毀

設 D 為滅火筒在製造後三年的測試中被銷毀這個事件。要發生這件事，滅火筒必須在第三次測試前已有故障（即 $T < 3$），在此之前處於故障狀態時所接受的每次測試都必須通過，而第三次測試則必須不通過。沒有故障的滅火筒必定通過測試，所以只有時間 T 之後的測試才有影響，而這些測試互相獨立，每次不通過的概率為 p。

- 若 $0 < T < 1$：它在第 1、2、3 次測試時都有故障，所以必須通過、通過、不通過：概率為 $(1-p)^2 p$。
- 若 $1 < T < 2$：它自動通過第 1 次測試，然後必須通過第 2 次測試，並在第 3 次測試不通過：概率為 $(1-p)p$。
- 若 $2 < T < 3$：它自動通過第 1 及第 2 次測試，並必須在第 3 次測試不通過：概率為 p。

若 $T > 3$，它在第 3 次測試時並無故障，因此不會在那時被銷毀。根據全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

此即所求。

已知在三年時被銷毀，求在 18 個月時已有故障的概率

設 E 為滅火筒在製造後 18 個月時已有故障這個事件，即 $T < \frac{3}{2}$。我們要求

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

想一想 區間 $(0, \frac{3}{2})$ 橫跨了一次測試。我們該如何把它分拆？

對測試而言，重要的是故障在哪一年出現，所以把 E 分拆為 $0 < T < 1$ 和 $1 < T < \frac{3}{2}$。我們有 $F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$，所以

$$\mathrm{P}\big(1 < T < \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

已知 $0 < T < 1$ 時，D 的概率與之前一樣是 $(1-p)^2 p$；已知 $1 < T < \frac{3}{2}$ 時，故障仍然

在第二年出現，所以 D 的概率是 $(1-p)p$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E\cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}.\end{aligned}$$

除以 $\mathrm{P}(D)$（當 $0<p\le 1$ 時它是正數，因為 $5p^2-13p+9$ 的判別式（discriminant）為 $169-180<0$，故此式恆為正），因子 p 約去，得

$$\mathrm{P}(E\mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

驗算

- 當 $p=1$ 時，每個有故障的滅火筒都會在故障後的第一次測試中被銷毀，所以在第 3 年被銷毀即表示故障在 $(2,3)$ 內出現：$\mathrm{P}(D)=\frac{1}{10}$ 而 $\mathrm{P}(E\mid D)=0$。兩條公式都吻合。
- 當 $p\to 0$ 時，$\mathrm{P}(E\mid D)\to\dfrac{5\cdot 18}{13\cdot 9}=\dfrac{10}{13}$，這正是 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2}\mid T<3)=\dfrac{9/13}{9/10}$：當測試幾乎檢測不到故障時，被銷毀這件事除了 $T<3$ 之外，幾乎沒有告訴我們任何資訊。
- 以 $p=0.4$ 對 10^6 個滅火筒進行模擬（simulation），得到 $\mathrm{P}(D)\approx 0.1838$（準確值 0.184）及 $\mathrm{P}(E\mid D)\approx 0.642$（準確值 $\frac{192}{299}\approx 0.642$）。

常見錯誤

- 忘記有故障的滅火筒在第三次測試不通過之前，必須先通過較早的測試。
- 在最後一部分把 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2})=\frac{9}{13}$ 當作單一整體使用：在第一年出現的故障與在第二年上半年出現的故障，所要經歷的測試次數並不相同。

STEP 之外

這裏的 T 是一個連續的壽命，但我們只能透過離散而不完美的檢查來觀察它。這正是生存分析（survival analysis）和可靠性理論（reliability theory）中區間設限（interval-censored）數據的情境，而最後一部分則是一次小型的貝葉斯更新（Bayesian update）：T 的先驗分布（prior distribution）因觀察到的一次失效而得到修正。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了連續分布以及這類條件化的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。