詳細解答

STEP I 2012，第 11 題

力學 • 滑輪與摩擦力

STEP I 2012，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q11

關鍵思路

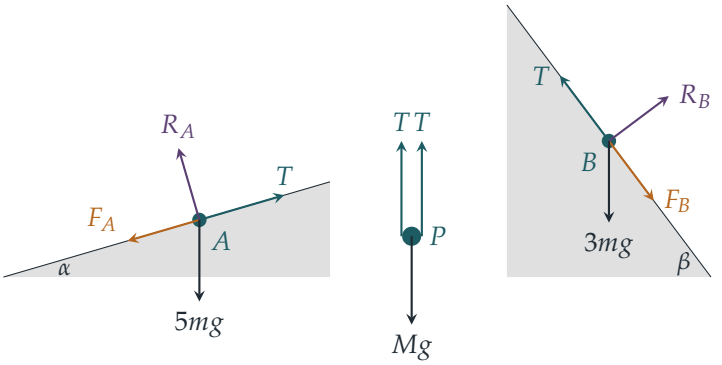
由於每個滑輪都是光滑（smooth）的，而繩子是輕（light）的，繩上各處的張力（tension）都相同。因此每個質點（particle）各給出一條把張力和摩擦力（friction）聯繫起來的方程，滑輪 P 則給出第三條。題中的角度取自 $7, 24, 25$ 和 $3, 4, 5$ 三角形，所以所有正弦和餘弦都是準確的分數。至於運動的情況，我們還需要多一樣東西：繩長固定如何把 A、B 和 P 的加速度聯繫起來。

解答

我們把 A、B 視為質點，把繩子視為輕而不可伸長（inextensible）的。滑輪 Q 和 R 光滑、輕且固定，而 P 光滑，質量為 M。設 $\alpha = \arctan\frac{7}{24}$ 及 $\beta = \arctan\frac{4}{3}$。由邊長為 $7, 24, 25$ 和 $3, 4, 5$ 的直角三角形，

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

設 T 為張力。由於所有滑輪都光滑，每段繩子中的 T 都相同。



在兩部分中，質點都是即將或正在沿斜面向上運動，所以摩擦力如圖所示沿各斜面向下。沿垂直於斜面的方向分解（resolve），

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

第 (i) 部分

兩個質點都即將滑動，所以摩擦力達到極限（limiting）：$F_A = \mu R_A$ 及 $F_B = \mu R_B$。沿各斜面分解（平衡）：

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

兩式相等，得 $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$，所以

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

於是 $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$。

滑輪 P 處於平衡，有兩段豎直的繩子把它向上拉，而其重量把它向下拉，所以

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

現在 $M = 9m$，比剛好能保持極限平衡（limiting equilibrium）的 $6m$ 更重，所以我們預期 P 會下降，並把兩個質點沿各自的斜面向上拉。

? **想一想** 三個加速度之間有甚麼關係？

設 A 和 B 沿各自斜面向上的加速度分別為 a 和 b，並設 P 向下的加速度為 p。繩長 $AQ+QP+PR+RB$ 固定不變。若 A 沿其斜面向上移動距離 x，B 沿其斜面向上移動距離 y，則 AQ 和 RB 分別縮短 x 和 y；若 P 下降 z，則 QP 和 PR 各伸長 z。因此在任何時刻都有 $2z=x+y$，求導兩次，得

$$2p=a+b.$$

由於 $\mu=\frac{1}{3}$，向上滑動時 A 所受的摩擦力為 $\frac{1}{3}R_A=\frac{8}{5}mg$，$B$ 所受的為 $\frac{1}{3}R_B=\frac{3}{5}mg$。對兩個質點沿各自斜面、對 P 沿豎直方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} A:&\quad T-\tfrac{7}{5}mg-\tfrac{8}{5}mg=5ma, && \text{故}T-3mg=5ma,\\ B:&\quad T-\tfrac{12}{5}mg-\tfrac{3}{5}mg=3mb, && \text{故}T-3mg=3mb,\\ P:&\quad 9mg-2T=9mp. \end{aligned}$$

設 $T=3mg+X$。於是 $a=\dfrac{X}{5m}$、$b=\dfrac{X}{3m}$，而繩子的條件給出

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{4X}{15m}.$$

代入 P 的方程：

$$3mg-2X=\frac{12X}{5}\quad\Longrightarrow\quad X=\frac{15mg}{22}.$$

因此

$$a=\frac{3g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad b=\frac{5g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad p=\frac{2g}{11}\text{ 豎直向下},$$

而張力為 $T=\frac{81}{22}mg$。

想一想 我們怎樣知道兩個質點真的都向上運動，而不是其中一個保持不動？

由上面的方程可見，質點只有在 $T>3mg$ 時才會沿斜面向上滑動，而只有在 $T\le 3mg$ 時才會保持靜止（或會向下滑）。兩個質點的臨界值同樣是 $3mg$，所以要麼兩者都向上運動，要麼兩者都不向上運動。若兩者都不向上運動，則 $a+b\le 0$，所以 $p\le 0$；但 $T\le 3mg$ 給出 $9mg-2T\ge 3mg>0$，迫使 $p>0$。這是矛盾，所以兩者都向上運動，而我們的解（其中 $a,b>0$）是自洽的。

驗算

- 在第 (i) 部分，把 $\mu=\frac{1}{3}$ 代入兩個質點的方程，得出相同的張力 $3mg$。
- 在第 (ii) 部分，$2p=\frac{4g}{11}=\frac{3g}{22}+\frac{5g}{22}=a+b$，符合繩子的要求；而 $T=\frac{81}{22}mg\approx 3.68mg$ 介乎 $3mg$（滑動的臨界值）與 $4.5mg$（P 沒有加速度時的值）之間。
- 以數值模擬逐步推進三條運動方程，繩長在捨入誤差範圍內保持不變，且 $p\approx 0.182g$。

- 若 M 再次為 $6m$，同樣的方法給出 $X = 0$，所以所有加速度都為零，與第 (i) 部分吻合。

常見錯誤

- 以為 $a = b = p$：滑輪 P 的移動速率是兩個質點移動速率總和的一半，因為有兩段繩子分擔它的運動。
- 把摩擦力定為沿斜面向上：兩個質點都正被拉向上，所以摩擦力與此相反，沿斜面向下。
- 忘記 P 上的兩段繩子都帶有張力 T，所以作用在它上面的向上力是 $2T$。

STEP 之外

關係式 $2p = a + b$ 是一個約束（constraint）：它把獨立坐標的數目由三個減至兩個。在大學一、二年級會學到的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，你會選取自動滿足約束的坐標，從而根本不必求張力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）透過約束方程仔細處理了許多滑輪系統，是通往這種觀點的良好橋樑。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。