詳細解答

STEP I 2012，第 10 題

力學 • 自由落體與聲音

> **STEP I 2012，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q10

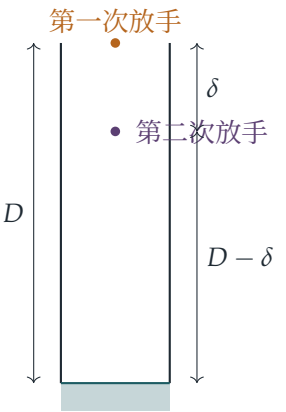
關鍵思路

每個量得的時間都由兩部分組成：石頭由靜止開始自由下落的時間，以及水花聲以等速傳回上方的時間。把兩次的時間都寫出來再相減，便立即得到 t。至於「由此」(hence) 部分，兩個平方根正是兩次的下落時間；我們知道它們的差，而它們的平方差又很簡單，所以因式分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 便把它們的和也交到我們手上，於是兩者都可以分別求出。

解答

t 的公式

我們把石頭模型化為只受重力作用、由靜止開始下落的質點（particle）（不計空氣阻力（air resistance)），並假設聲音以等速 u 沿井筆直向上傳播。



由靜止放下的石頭在時間 τ 內下落距離 h，其中 $h = \frac{1}{2}g\tau^2$，所以 $\tau = \sqrt{2h/g}$。之後聲音要走同樣的距離 h 傳回我這裏，需時 h/u。所以從水面以上高度 h 處放下石頭時，我量得的時間是

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

從井口放下時，$h = D$；爬下去之後，我（以及石頭的起點）位於水面以上高度 $D - \delta$ 處，而聲音只需傳到那裏便會被我聽到。因此

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

得證。

D 的公式

記兩次的下落時間為 $a = \sqrt{2D/g}$ 及 $b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$。剛才證得的結果說明

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

由於 $\delta > 0$，我們有 $a > b$，所以 $\beta > 0$；特別地，$\beta \neq 0$。此外

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

想一想 我們知道 $a - b$。怎樣才能單獨求出 a？

因式分解：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$，而由於 β 是正數，我們可以除以 β。所以

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

把此式與 $a - b = \beta$ 相加再除以二，得

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

最後，$a = \sqrt{2D/g}$ 表示 $D = \frac{1}{2}ga^2$，所以

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

得證。（所以 T 其實就是石頭從井口下落整個深度所需的時間。）

數值情況

取 $u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$ 及 $\delta = 10\,\mathrm{m}$，

$$\beta = \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},$$
$$T = \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},$$
$$D = \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\ \mathrm{m}.$$

所以這口井深約 185 m。

驗算

- 把 $D = 26645/144$ 及 $\delta = 10$ 代回 t 的公式：兩次下落時間分別是 $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$ 及 $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$，相差 $1/6\,\mathrm{s}$，再加上 $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$，恰好得到 $t = 0.2\,\mathrm{s}$。
- 若聲音瞬間傳到（$u \to \infty$），則 $\beta = t$，理應如此：只有下落時間才有影響。
- 以數值方法逐步模擬石頭下落，再加上聲音的延遲，可重現 t 的公式至 $10^{-4}\,\mathrm{s}$ 的精度；而反求公式 $D = \frac{1}{2}gT^2$ 在 10^4 個隨機情況中都能還原 D。

常見錯誤

- 忘記了我爬下去之後聲音只需傳播 $D - \delta$，因而漏掉 δ/u 這一項。
- 試圖直接把方程 $a - b = \beta$ 平方；這會導致繁瑣的代數運算，而 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 只需一行便給出 $a + b$。
- 完全忽略聲音：取 $\beta = t = 0.2$，同一方法會給出 $T = 5.1\,\mathrm{s}$ 及 $D \approx 130\,\mathrm{m}$，錯得很遠。

STEP 之外

這裏所用的方法是一種*差分測量*（differential measurement）：我們不依賴單一次計時，而是比較兩個相差已知量的實驗，使未知量互相抵消。最後一個常見錯誤顯示答案對數據的微小變化有多敏感，因為 t 是兩個大時間之間的微小差；物理學家和工程師會用誤差傳播（error propagation）和條件數（condition number）來量化這種敏感度，這些內容會在大學一年級的實驗方法及數值分析（numerical analysis）課程中學到。如想進一步了解如何仔細地為簡單運動建立模型，可閱讀 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。