詳細解答

STEP I 2012，第 1 題

純數學 • 以微積分求最優值

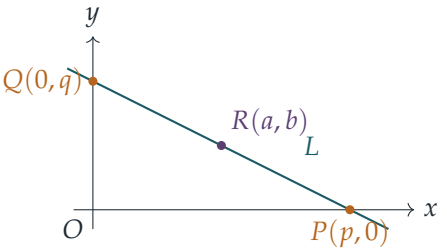
> **STEP I 2012，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

關鍵思路

一切都由一個數控制：斜率（gradient）。一旦規定 L 必須經過 R，截距（intercepts）p 和 q 便是 m 的簡單函數（function），而兩個要求最小化的距離也都變成只依賴 m 的函數。和 $p+q$ 可拆成一個常數加上形如 $am+b/m$ 的項，這正是算術－幾何平均不等式（AM–GM）的典型用武之地（或者求一次導數也可以）。至於長度 PQ，留意到 $q=mp$ 會很有幫助，因為這樣在求導之前 PQ^2 就能漂亮地因式分解。

解答

求 p 和 q



由於 $R(a,b)$ 在 $y=c-mx$ 上，我們有 $b=c-ma$，所以 $c=b+ma$。直線在 $x=0$ 處與 y 軸相交，所以 $q=c$；在 $y=0$ 處與 x 軸相交，所以 $p=c/m$（因為 $m>0$，這是可以的）。因此

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

對每個 $m > 0$，兩者都是正數，符合題目要求。另外留意

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

這其實只是說 L 的斜率是 $-q/p$。下面會用到這一點。

最小化 $OP + OQ$

由於 $p, q > 0$，P 和 Q 到 O 的距離就是 p 和 q 本身，所以當 R 固定而 m 在 $m > 0$ 範圍內變化時，我們要最小化

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

括號內是兩個正數之和，而它們的積 ab 與 m 無關。由算術－幾何平均不等式，

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

等號成立當且僅當 $am = b/m$，即 $m = \sqrt{b/a}$（這是正數，所以這條直線是容許的）。因此

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

而且這個下界可以達到。所以距離之和的最小值是 $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$，正如所求。

（如果你偏好用微積分：$S'(m) = a - b/m^2$，它只在 $m = \sqrt{b/a}$ 處為零，代入後得到相同的值。）

最小化 PQ

由畢氏定理（Pythagoras），並利用 $q = mp$，

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

由於 $PQ > 0$，最小化 PQ 等同於最小化 $f(m) = PQ^2$。用乘積法則（product rule）和鏈式法則（chain rule）求導，

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

想一想 $-b$ 在哪裏被抵消了？

在方括號內，$-\frac{b}{m^2}(1 + m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$，而 $m(a + \frac{b}{m}) = am + b$；兩個 b 互相抵消。正是因為這個抵消，我們才把 PQ^2 寫成 $p^2(1 + m^2)$，而不是直接展開 $p^2 + q^2$。

第一個因子是正數，所以 $f'(m)=0$ 當且僅當 $am=b/m^2$，即 $m^3=b/a$，得到唯一的駐點（stationary point）

$$m=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

（題目說我們可以假設它是極小值；事實上，m 較小時 $f'<0$，m 較大時 $f'>0$，所以它是 $m>0$ 上的全局最小值（global minimum）。）

現在代入。取這個 m，

$$a+\frac{b}{m}=a+b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}),\qquad 1+m^2=1+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

因此

$$PQ^2=a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3,$$

所以 P 與 Q 之間的最短距離是

$$PQ_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

這就是題目所要求的「相似形式」：第一個答案括號內的指數是 $\frac{1}{2}$、括號外是 2，這個則是括號內 $\frac{2}{3}$、括號外 $\frac{3}{2}$。

驗算

- 對稱性：交換 a 和 b（即對 $y=x$ 作反射）必須令兩個最小值都不變，而事實確實如此。
- 數值例子：取 $a=1$、$b=8$。第二個結果預測 $m=2$，得 $p=5$、$q=10$ 及 $PQ=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11.180$，而 $(1+4)^{3/2}=5\sqrt{5}$，果然吻合。至於距離之和，$m=\sqrt{8}$ 給出 $p+q=9+4\sqrt{2}\approx 14.657=(1+2\sqrt{2})^2$。
- 我們對 2000 組隨機的 (a,b)，把兩個最小值與對 m 的暴力搜尋結果比較；兩者相差約 10^{-8}。

常見錯誤

- 把 p^2+q^2 完全展開再求導：這樣做沒有錯，但很繁瑣，而且容易看漏因子 $am-b/m^2$。先看出 $q=mp$ 可以省下大量功夫。
- 忘記最小化 PQ 與最小化 PQ^2 之所以等價，只是因為 $PQ>0$；以及在化簡 $a+b/m$ 時把分數指數弄錯。

STEP 之外

第二個結果其實是經典的「梯子轉角」問題的變身：$(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ 是能夠水平地搬過寬度分別為 a 和 b 的兩條走廊之間轉角的最長梯子長度。長度固定的線段 PQ 所成的族的包絡線（envelope）是一條星形線（astroid）$x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$，而 R 恰好在包絡線上，當且僅當 ℓ 等於這個最小值。包絡線和約束最佳化（constrained optimisation）（以及之後的拉格朗日乘數（Lagrange multipliers））都會在大學一年級的微積分課程中出現；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類型的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。