詳細解答

STEP III 2011，第 9 題

力學 • 圓柱上的運動

STEP III 2011，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

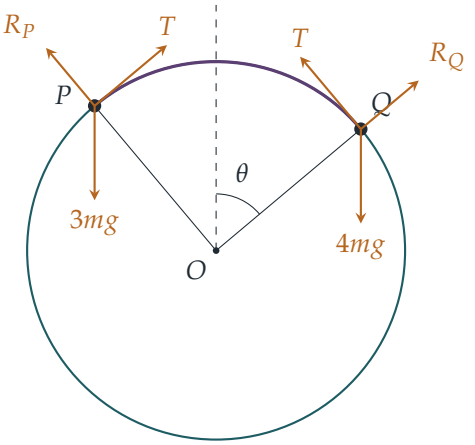
step.maths.org/questions/11-s3-q9

關鍵思路

長度為 $\frac{1}{2}\pi a$ 的繩子貼在圓柱面上，在 O 點所張的角是直角，因此 OP 與 OQ 始終互相垂直，整個系統只需一個坐標 θ 來描述。由能量守恆（conservation of energy）可直接得出 $\dot{\theta}^2$，再沿指向圓心的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），便可把每個法向反作用力（normal reaction）以 $\dot{\theta}^2$ 表示。質點離開表面，即表示法向反作用力降至零。至於張力（tension），則用切向（tangential）方程：把兩條方程相加可消去 T 並得出 $\ddot{\theta}$，之後任取其中一條便可求出 T。

解答

模型。P 和 Q 是質點（particle），繩子輕而不可伸長（inextensible），圓柱面光滑（smooth）。輕繩繞過光滑表面時，各處張力同為 T。兩質點之間的弧長為 $\frac{1}{2}\pi a$，所以 $\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$。設 θ 為 OQ 與向上鉛垂線所成的角，Q 位於最高點的一側。那麼 OP 在另一側與向上鉛垂線所成的角為 $\frac{1}{2}\pi - \theta$。只要兩質點仍留在表面上，它們都在半徑為 a 的圓上以角速率（angular speed）$\dot{\theta}$ 運動，因此各自的速率均為 $a\dot{\theta}$。



平衡。在每個質點處沿表面方向分解力（法向反作用力沒有切向分量，而繩子沿切向拉向最高點）：對 Q 得 $T = 4mg\sin\theta$，對 P 得 $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$。因此在平衡（equilibrium）位置時 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，即 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\theta = \frac{4}{5}$。

能量。取 O 所在高度為勢能（potential energy）零點。Q 的高度為 $a\cos\theta$，P 的高度為 $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$。法向反作用力不做功（它們與運動方向垂直），而張力對整個系統不做淨功（繩子不可伸長），所以能量守恆。由於擾動輕微，系統由靜止開始運動，故

$$\tfrac{1}{2}(3m + 4m)a^2\dot\theta^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

兩邊乘以 $2/(ma)$，得

$$7a\dot\theta^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

此即所求。當 Q 向下移動時，θ 由 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ 開始增大。

第 (i) 部分

Q 在半徑為 a 的圓上以速率 $a\dot\theta$ 運動，所以它有指向 O 的加速度 $a\dot\theta^2$。其重量指向 O 的分量為 $4mg\cos\theta$，而 R_Q 向外作用。繩子沿切向，因此在徑向上沒有貢獻。於是

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot\theta^2, \qquad \text{所以} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot\theta^2.$$

當 R_Q 降至零，即 $a\dot\theta^2 = g\cos\theta$ 時，Q 離開表面。把此式代入 $\theta = \beta$ 時的能量方程：

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad\Longrightarrow\quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

此即所求。

> ? **想一想** 為甚麼能量方程一直到 $\theta = \beta$ 仍然成立？

只要兩個質點都留在圓柱面上，能量方程便成立，而題目告訴我們 Q 先離開。你也可以自行驗證這一點。對 P 作同樣的推導，得 $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot\theta^2$，它在 $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$ 時為零。在 $\beta \approx 73.6^\circ$ 時，左邊約為 14.7，所以 R_P 仍然是正數。

第 (ii) 部分

現在沿切向分解力，以運動方向為正方向。Q 以切向加速度 $a\ddot{\theta}$ 遠離最高點，而 P 以同樣的切向加速度 $a\ddot{\theta}$ 移向最高點（繩子使兩者速率保持相等）。對 Q 而言，重力有向前的分量 $4mg\sin\theta$，張力則向後拉：

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

對 P 而言，張力把它向前拉，重力有向後的分量 $3mg\cos\theta$：

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相加可消去 T：

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

（這與把能量方程對時間求導再除以 $2\dot{\theta}$ 的結果一致。）代入 (1)：

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

此即所求。當 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 時此值為正，所以繩子在整個過程中都保持拉緊。

驗算

- 在平衡位置時，$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$，所以 $T = \frac{12}{5}mg$。這與 $4mg\cdot\frac{3}{5}$ 及 $3mg\cdot\frac{4}{5}$ 相符。
- 寫成 $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$，其中 $\tan\alpha = \frac{2}{5}$，可得 $\beta \approx 1.2839$ 弧度 $\approx 73.56°$。我們從剛越過平衡位置之處開始以數值方法逐步模擬運動，發現 R_Q 正是在這個角度首次降至零，而 R_P 則保持為正。在整條路徑上，能量關係式和張力公式在捨入誤差範圍內均成立。

常見錯誤

- 把 P 的高度當作 $a\cos\theta$ 而不是 $a\sin\theta$。繩長的設定，關鍵正在於直角 $\angle POQ$。
- 給兩個質點不同的張力，或把 T 放進徑向方程。繩子沿切向接觸質點，所以 T 只出現在切向方程中。

STEP 之外

由於一個坐標 θ 便足以描述一切，這是一個單自由度（one degree of freedom）系統。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）可以直接由動能和勢能得出運動方程，完全不需要考慮約束力（forces of constraint）。法向反作用力和張力之後會以約束條件的「拉格朗日乘數」（Lagrange multipliers）的形式出現。在接觸拉格朗日（Lagrange）的理論之前，Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是加深你對約束運動和能量方法理解的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。