詳細解答

STEP III 2011，第 8 題

純數學 • 複數軌跡

> **STEP III 2011，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q8

關鍵思路

將分子和分母同乘以分母的共軛（conjugate），便得到 u 和 v；之後每一部分只需代入題目給出的直線，再認出一條熟悉的曲線。半角代換（half-angle substitution）把 $\frac{2x}{1+x^2}$ 和 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 變成正弦和餘弦，這正是題目建議用它的原因。整個過程中，要時刻留意曲線上哪些點真正被取到：端點和缺失的點佔了答案的一半。

解答

設 $z = x + \mathrm{i}y$。則 $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$ 及 $\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$，因此把分子和分母同乘以 $x - \mathrm{i}(1+y)$，得

$$\begin{aligned} w &= \frac{((1-y)+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}(1+y))}{x^2+(1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}(x^2-(1-y)(1+y))}{x^2+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

因此

$$u = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2},$$

適用於 $z \neq -\mathrm{i}$（在該點 w 無定義）。

知道逆映射（inverse map）亦很有幫助。由 $w(\mathrm{i}+z) = 1 + \mathrm{i}z$ 得 $z(w-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$，所以

$$z = \frac{1-\mathrm{i}w}{w-\mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

因此每個 $w \neq \mathrm{i}$ 都恰好來自一個 z，而 $w = \mathrm{i}$ 永遠取不到。這就是我們會一再遇到的那個缺失點。

第 (i) 部分

當 $y = 0$ 時，

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

令 $x = \tan(\theta/2)$。當 x 取遍所有實數時，θ 取遍 $-\pi < \theta < \pi$，而每個 x 恰好對應一個這樣的 θ。由半角公式，

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

所以 $u^2+v^2 = 1$。此外，當 $-\pi < \theta < \pi$ 時，$(\sin\theta, -\cos\theta)$ 描出整個單位圓（unit circle），只缺 $\theta = \pm\pi$ 所對應的點，即 $(u,v) = (0,1)$。因此 w 的軌跡（locus）是圓 $u^2+v^2=1$ 去掉單一點 $w = \mathrm{i}$，正如所求。（缺失點是 $x \to \pm\infty$ 時 w 的極限。）

第 (ii) 部分

現在 $-1 < x < 1$，對應 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。在此範圍內 $v = -\cos\theta < 0$，而 $u = \sin\theta$ 由 -1 遞增至 1（不包括兩端）。所以 w 的軌跡是

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

即單位圓的下半部分，不包括其端點 $w = \pm 1$（它們來自 $x = \pm 1$）。

第 (iii) 部分

當 $x = 0$ 時，得 $u = 0$ 及

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

由於 $y > -1$，約去 $y+1$ 是沒有問題的。

想一想 是否每個負的 v 值都能取到，還是只取到其中一部分？

當 y 由 -1 增加至 1，$y+1$ 在 $(0,2)$ 中遞增，所以 $\frac{2}{y+1}$ 在 $(1,\infty)$ 中遞減，而 v 則在 $(-\infty, 0)$ 中連續且嚴格遞增。當 $y \to -1^+$ 時，$v \to -\infty$；當 $y \to 1^-$ 時，$v \to 0^-$。所以每個負的 v 都恰好取到一次。w 的軌跡是負虛軸

$$u = 0, \quad v < 0,$$

不包括原點（它來自 $y = 1$）。

第 (iv) 部分

當 $y = 1$ 時，

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

於是

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

所以 w 位於 $u^2 + v^2 = v$ 上，即

$$u^2 + (v - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

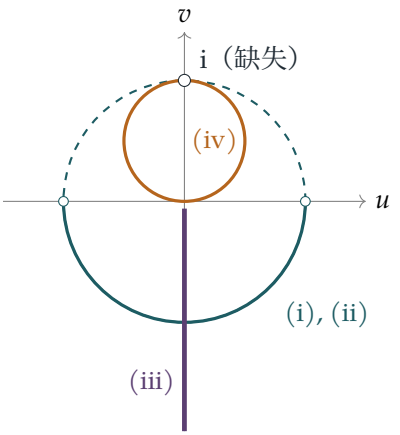
這是圓心為 $\frac{1}{2}\mathrm{i}$、半徑為 $\frac{1}{2}$ 的圓。

> ? **想一想** 這個圓上哪些點真正被取到？

由於 $v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$，我們有 $0 \le v < 1$，所以最高點 $w = \mathrm{i}$ 永遠取不到。其餘每一點都能取到：令 $x = 2\tan(\phi/2)$，其中 $-\pi < \phi < \pi$，得

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

它繞整個圓一周，只缺 $\phi = \pm\pi$，即點 $(0,1)$。（另一種方法是用逆映射，它說明每個 $w \ne \mathrm{i}$ 都恰好來自一個 z。）所以軌跡是圓 $u^2 + v^2 = v$ 去掉點 $w = \mathrm{i}$。它在 $w = 0$ 與實軸相切，該點是 $z = \mathrm{i}$ 的像。



由虛線和實線組成的青色圓是實軸的像，即第 (i) 部分；實線的下半部分是第 (ii) 部分。紫紅色射線是第 (iii) 部分，琥珀色圓是第 (iv) 部分。

驗算

- $z = 0$ 給出 $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$：它既在下半圓 (ii) 上，也在射線 (iii) 上，而 $z = 0$ 確實同時位於這兩段線上。
- $z = 1 + \mathrm{i}$ 給出 $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$，而 $0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$，所以它位於 (iv) 的圓上。
- 很大的實數 z：$w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$，趨近缺失點 i。
- 我們亦以數值方法對數以千計的隨機點作了驗證，既驗證了 u, v 的公式，也驗證了每個所聲稱的軌跡上的每一點，都在正確的直線或線段上有原像（preimage）。

常見錯誤

- 只寫出圓或半圓，卻沒有說明哪些點被去掉或不包括在內：這裏是 (i) 和 (iv) 中的 $w = \mathrm{i}$，以及 (ii) 中的端點 ± 1。
- 聲稱 (iii) 的軌跡是整條虛軸：對每個 $-1 < y < 1$，$v = \frac{y-1}{y+1}$ 都是負數。

STEP 之外

這個映射是一個默比烏斯變換（Möbius transformation）；事實上 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$，所以 $|w| = |z - \mathrm{i}|/|z + \mathrm{i}|$，而它等於 1 當且僅當 z 與 $\pm\mathrm{i}$ 等距，亦即當它是實數時。默比烏斯映射把直線和圓映成直線和圓（直線被視為「經過 ∞ 的圓」），而缺失點 i 正是 ∞ 的像。這個映射（即凱萊變換（Cayley transform））把上半平面映成單位圓盤，是複分析（complex analysis）和雙曲幾何（hyperbolic geometry）中的重要工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以圖像為主導，對默比烏斯變換有十分精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。