詳細解答

STEP III 2011，第 7 題

純數學 • 數學歸納法

> **STEP III 2011，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q7

關鍵思路

把 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ 平方，就能消去兩個獨立的平方根，剩下形如 $p+q\sqrt{a(a+1)}$ 的數；因此當 n 為偶數時，我們可以透過乘以 T_2，由 T_n 推進到 T_{n+2}。接着會發現，量 $A^2-a(a+1)B^2$ 在這個乘法下保持不變，而這正是歸納法（induction）所需要的。再多乘一個因子 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ 便能處理 n 為奇數的情況；而 (i) 和 (ii) 中的恆等式（identity）說明，兩項分別是兩個相鄰整數的平方根。

解答

全文記 $N=a(a+1)$，於是 $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$。

第 (i) 部分

基本情況（*base case*），$n=2$。展開得

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

所以 $A_2=2a+1$ 和 $B_2=2$ 都是整數，而且

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個偶數 $n\geq 2$，有 $T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$，其中整數 A_n, B_n 滿足 $A_n^2-NB_n^2=1$。為簡便起見，記 $p=2a+1$，並注意 $p^2=4a^2+4a+1=$

$4N+1$。由於 $T_{n+2}=T_nT_2$，

$$\begin{aligned}T_{n+2}&=(A_n+B_n\sqrt{N})(p+2\sqrt{N})\\&=(pA_n+2NB_n)+(2A_n+pB_n)\sqrt{N}.\end{aligned}$$

因此可取

$$A_{n+2}=pA_n+2NB_n,\qquad B_{n+2}=2A_n+pB_n,$$

由於 p、N、A_n 和 B_n 都是整數，它們也是整數。至於恆等式，交叉項 $\pm4pNA_nB_n$ 互相抵消：

$$\begin{aligned}A_{n+2}^2-NB_{n+2}^2&=(p^2A_n^2+4pNA_nB_n+4N^2B_n^2)-N(4A_n^2+4pA_nB_n+p^2B_n^2)\\&=(p^2-4N)A_n^2-N(p^2-4N)B_n^2\\&=A_n^2-NB_n^2=1,\end{aligned}$$

這裏先用了 $p^2-4N=1$，再用歸納假設（inductive hypothesis）。所以命題對 $n+2$ 成立；由歸納法，命題對每個正偶數 n 都成立。

另外注意 $A_2,B_2>0$，而遞推關係（recurrence）的係數都是正數，所以對每個偶數 n，都有 $A_n>0$ 和 $B_n>0$。第 (iii) 部分會用到這一點。

想一想 為甚麼 A^2-NB^2 在乘以 T_2 之後仍然保持不變？

因為 $A^2-NB^2=(A+B\sqrt{N})(A-B\sqrt{N})$，而同樣的計算顯示，「共軛」（conjugate）$A-B\sqrt{N}$ 在每一步都被乘以 $p-2\sqrt{N}$。因此兩者之積每一步都被乘以 $(p+2\sqrt{N})(p-2\sqrt{N})=p^2-4N=1$。上面的代數運算只不過是把這個事實逐步寫出來而已。

第 (ii) 部分

$n=1$ 的情況。$T_1=1\cdot\sqrt{a+1}+1\cdot\sqrt{a}$，所以 $C_1=D_1=1$，且 $(a+1)C_1^2=a+1=aD_1^2+1$。

$n\geq3$ 爲奇數的情況。此時 $m=n-1$ 是正偶數，所以由第 (i) 部分，$T_m=A_m+B_m\sqrt{N}$，且 $A_m^2-NB_m^2=1$。利用 $\sqrt{N}\sqrt{a+1}=(a+1)\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{N}\sqrt{a}=a\sqrt{a+1}$，

$$\begin{aligned}T_n=(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(A_m+B_m\sqrt{N})&=A_m\sqrt{a+1}+A_m\sqrt{a}+(a+1)B_m\sqrt{a}+aB_m\sqrt{a+1}\\&=(A_m+aB_m)\sqrt{a+1}+(A_m+(a+1)B_m)\sqrt{a}.\end{aligned}$$

所以 $C_n=A_m+aB_m$ 和 $D_n=A_m+(a+1)B_m$ 都是整數（而且是正數）。於是

$$\begin{aligned}(a+1)C_n^2-aD_n^2&=(a+1)(A_m^2+2aA_mB_m+a^2B_m^2)\\&\quad-a(A_m^2+2(a+1)A_mB_m+(a+1)^2B_m^2)\\&=A_m^2+a(a+1)[a-(a+1)]B_m^2\\&=A_m^2-NB_m^2=1,\end{aligned}$$

因為含 A_mB_m 的項互相抵消。因此 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$，得證。（$n=1$ 的情況其實是同一個計算，只是取 $T_0 = 1$，即 $A_0 = 1$、$B_0 = 0$。）

第 (iii) 部分

n 爲偶數。由於 $A_n > 0$ 且 $B_n > 0$，

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

而由第 (i) 部分，整數 NB_n^2 和 $A_n^2 = NB_n^2 + 1$ 是相鄰的。

> ? **想一想** 為甚麼我們需要知道 A_n 和 B_n 的正負號？

因為 $\sqrt{A^2} = |A|$，而不是 A。只有在知道 $A_n \geq 0$ 之後，寫 $A_n = \sqrt{A_n^2}$ 才成立，這就是我們在第 (i) 部分記下正性的原因。

n 爲奇數。由於 $C_n, D_n > 0$，

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

而由第 (ii) 部分，整數 aD_n^2 和 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ 是相鄰的。

所以對每個正整數 n，都存在某個正整數 k 使 $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$：具體而言，$n$ 為偶數時 $k = a(a+1)B_n^2$，n 為奇數時 $k = aD_n^2$。

驗算

取 $a = 3$，則 $T_n = (2+\sqrt{3})^n$。於是 $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$，且 $49 = 12 \cdot 4 + 1$。接着，由 $A_2 = 7$、$B_2 = 2$ 得 $C_3 = 13$、$D_3 = 15$，以及 $T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$，與直接計算 $(2+\sqrt{3})^3$ 的結果一致。我們用電腦對 $1 \leq a \leq 39$ 和 $n \leq 23$ 運行了遞推關係，以整數運算準確驗證了兩條恆等式，並以數值方式驗證了 T_n 的展開式。

常見錯誤

- 忘記基本情況，或者在第 (i) 部分只涉及偶數 n 的情況下，卻從 $n = 1$ 開始歸納。
- 在第 (iii) 部分寫 $A_n = \sqrt{A_n^2}$，卻沒有指出 A_n（以及 B_n、C_n、D_n）是正數。

STEP 之外

方程 $x^2 - Ny^2 = 1$ 就是佩爾方程（Pell's equation），而第 (i) 部分說明，$(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$ 的各次冪為 $N = a(a+1)$ 生成無限多組解。關鍵事實是：$x + y\sqrt{N}$ 的「範數」（norm）$x^2 - Ny^2$ 具有積性（multiplicative），這正是二次數域（quadratic number field）及其單位（unit）理論的起點。達文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對佩爾方程和連分數（continued fraction）有非常易讀的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。