詳細解答

STEP III 2011，第 6 題

純數學 • 積分代換

> **STEP III 2011，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q6

關鍵思路

題目不容許我們計算任何積分的值，所以可用的工具只有那些把一個積分變成另一個積分的方法：代換法（substitution）和分部積分法（integration by parts）。積分上下限就是線索。數 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 與 $\ln 2, \ln 3$ 由 $v = e^{-u}$ 聯繫起來，而 $\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$ 則由 $t = e^{-2x}$ 與 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 聯繫起來。積分 T 和 V 的上下限相同，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$ 提示我們可以在兩者之間用分部積分。三條聯繫已足以使四個積分全部相等。



解答

全文使用

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

特別地，$\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$ 及 $\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$。所有被積函數（integrand）在其（閉且有界的）區間上都是連續的，因此每個積分都存在，下面的運算都是合理的。

$T = V$：分部積分

在 T 中，我們對 $\frac{1}{t}$ 積分、對 $\operatorname{artanh} t$ 求導，取 $u = \operatorname{artanh} t$ 及 $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$，於是 $w = \ln t$（由於在區間上 $t > 0$，這沒有問題）：

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

因為餘下的積分正正就是 V（啞變量（dummy variable）用甚麼名稱並不重要）。

> **想一想** 邊界項（boundary term）不會破壞等式嗎？

它等於零，而這正是本題巧妙之處。在上限，$\ln\frac{1}{2}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$；在下限，$\ln\frac{1}{3}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$。兩者都等於 $-\frac{1}{2}\ln 2\ln 3$，所以

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 = 0,$$

因此 $T = V$。

$V = U$：代換 $v = e^{-u}$

設 $v = e^{-u}$，則 $\ln v = -u$ 及 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$。當 $v = \frac{1}{3}$ 時，$u = \ln 3$；當 $v = \frac{1}{2}$ 時，$u = \ln 2$。於是

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\left(-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（交換上下限）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（分子分母同乘以 } e^{u}\text{）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$：代換 $t = e^{-2x}$

首先改寫 X 的被積函數。對 $x > 0$，

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{所以} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\left(e^{-2x}\right),$$

由於 $0 < e^{-2x} < 1$，此式成立。現設 $t = e^{-2x}$，則 $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$。當 $x = \frac{1}{2}\ln 2$ 時，$t = \frac{1}{2}$；當 $x = \frac{1}{2}\ln 3$ 時，$t = \frac{1}{3}$。因此

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\,\mathrm{d}t = T.$$

結論

把三條聯繫合起來，得 $X = T = V = U$，所以四個積分全部相等，得證。我們始終無須求出任何一個積分的值。

驗算

對每個積分分別使用辛普森法則（Simpson's rule），得 $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$，大約在小數點後 12 位都吻合。用計算機快速驗證邊界項為零也令人安心：$\ln \frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$ 和 $\ln \frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{3}$ 的結果都是 $-0.3807\ldots$。

常見錯誤

- 在 $V = U$ 中漏掉負號：共有三個負號（V 前面的一個、$\ln v = -u$ 中的一個及 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ 中的一個），而交換上下限又帶來第四個。
- 因為邊界項看似不為零，便放棄分部積分，卻沒有在兩端把它算出來。
- 寫成 $\ln \coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$，漏掉了因子 2；這個因子稍後會被 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ 中的 $\frac{1}{2}$ 抵消。

STEP 之外

把 $\operatorname{artanh} t/t$ 展開成冪級數（power series），可見這個共同值等於 $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$，其中 $\chi_2(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$ 是勒讓德（Legendre）chi 函數，與雙對數函數（dilogarithm）$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ 關係密切。這些函數的許多恆等式，正是來自這類變量代換。不計算任何一個積分而證明兩個積分相等，是數學分析（analysis）中的標準技巧；而支持代換法和分部積分法的定理（連續性（continuity）、微積分基本定理（fundamental theorem of calculus））會在第一門分析課程中得到嚴格的表述。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是看這些定理被仔細證明的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。