詳細解答

STEP III 2011，第 5 題

純數學 • 以積分求面積

> **STEP III 2011，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 4.9 節 *Holditch 定理*中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/holditch.html

關鍵思路

直角坐標（cartesian）公式 $(*)$ 之所以有用，是因為它是雙線性（bilinear）的：若 A 是 P 平移一個只依賴 t 的向量所得，那麼 OA 掃過的面積可拆成三部分：OP 掃過的面積、單由平移產生的面積，以及一個交叉項（cross term）。這根桿正好給出這類平移，即 $\mp$ 單位向量（unit vector）$(\cos t, \sin t)$ 的某個倍數。交叉項 f 看似無從計算，但我們根本不需要算它：A 和 B 都沿同一條曲線 $\mathcal{C}$ 走一圈，所以 $[A] = [B]$，而這條等式就確定了 f。

解答

面積公式

設 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$，其中 r 和 θ 都是 t 的函數（function），由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

其中上方的點表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。於是

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

因為含 $r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ 的項互相抵消。把積分（integral）變數由 θ 換成 t，

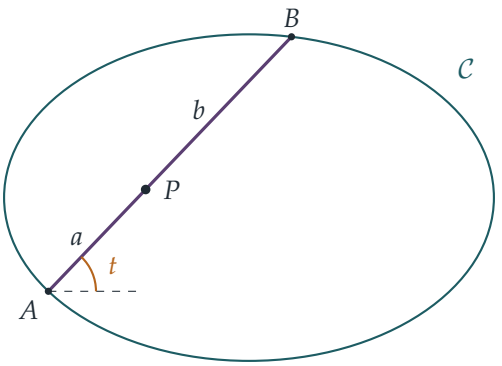
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

這正是 $(*)$。

A 和 B 的坐標

桿的方向是單位向量 $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$，由 A 指向 B，而 P 位於兩者之間，且 $AP = a$、$PB = b$。所以 A 是 $P - a\mathbf{u}$，B 是 $P + b\mathbf{u}$：

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA 掃過的面積

同樣以點表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。對 A 有

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

展開得

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

所以

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

現在以 t 由 0 至 2π 應用 $(*)$。第一個括號給出 $[P]$，常數 a^2 給出 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$，而根據 f 的定義，最後一項給出 $-af$。因此

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

即為所求。

對 B 而言，唯一的改變是處處把 $-a$ 換成 $+b$（即在上面的推導中以 $-b$ 代替 a）。所以

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

$\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 之間的面積

想一想 $[A]$、$[B]$ 和 $[P]$ 實際上等於甚麼？

當 t 由 0 變到 2π，桿轉了整整一圈。兩個端點都沿 $\mathcal{C}$ 逆時針走一圈，並回到起點：轉了半圈時，A 和 B 互換位置；轉了一整圈後，兩者都回到原位。原點位於 $\mathcal{D}$ 之內，因此也位於 $\mathcal{C}$ 之內。所以 OA 和 OB 各自恰好掃過 $\mathcal{C}$ 所圍的區域一次，而 OP 掃過 $\mathcal{D}$ 所圍的區域一次。以 $|\mathcal{C}|$ 和 $|\mathcal{D}|$ 表示這兩個面積，

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

令 $[A] = [B]$，便可消去 $[P]$：

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

由於 $a + b > 0$（它是桿的長度），可以兩邊相除，得 $f = \pi(a-b)$。因此

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

所以兩曲線之間的面積是 πab。改用 $[B]$ 計算，同樣得到 $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$，這是一個令人安心的一致性檢查。

驗算

- 圓形。若 $\mathcal{C}$ 是半徑為 R 的圓，長度為 $a+b$ 的弦與圓心的距離恆為 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$。由畢氏定理（Pythagoras），$P$ 與圓心的距離是 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$，所以 $\mathcal{D}$ 是一個同心圓（concentric circle），其半徑的平方為 $R^2 - ab$。兩者之間的面積是 $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$。
- 對稱性。答案關於 a 和 b 對稱，這是必然的，因為把桿倒轉便會互換兩者的角色。
- 數值驗證。我們讓一根 $a = 1$、$b = 1.5$ 的桿沿橢圓 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ 移動，並用鞋帶公式（shoelace formula）計算所描出曲線的面積。兩曲線之間的面積算得 4.712390，與 $\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$ 吻合。我們亦對隨機選取的曲線 $P(t)$，用數值積分（quadrature）驗證了 $[A]$ 和 $[B]$ 的恆等式。

常見錯誤

- 把 $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$ 的正負號弄錯。對 $-a\cos t$ 求導得 $+a\sin t$。
- 試圖直接計算 f。它取決於 $\mathcal{D}$ 的形狀，沒有更多資料便無法算出。關鍵在於 $[A] = [B]$ 就能確定它。

STEP 之外

這就是 Holditch 定理（Holditch's theorem，1858 年）：$\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 之間的面積只取決於 a 和 b，而與 $\mathcal{C}$ 的形狀無關。公式 $(*)$ 是格林定理（Green's theorem）的特例，該定理把區域上的面積分轉化為沿其邊界的線積分。它也是求積儀（planimeter）背後的原理；求積儀是一種沿邊界描畫來量度面積的機械裝置。格林定理是大學一年級向量微積分（vector calculus）的核心內容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對這類邊界積分給出了優美的幾何觀點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。