詳細解答

STEP III 2011，第 4 題

純數學 • 楊氏不等式

> **STEP III 2011，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 3.4 節以面積證明不等式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/areas-inequalities.html

關鍵思路

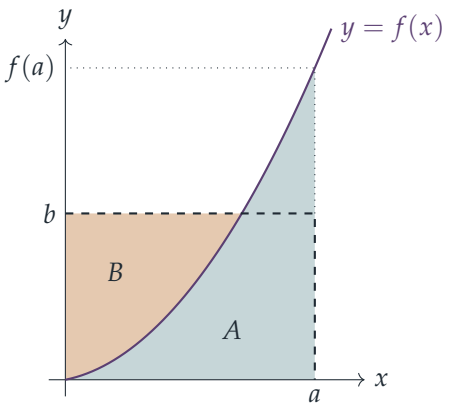
$(*)$ 中的兩個積分（integral）都是同一幅圖上的面積：$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲線與 x 軸之間的面積，而 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 是曲線與 y 軸之間的面積。兩者合起來總能覆蓋以 $(0,0)$ 和 (a,b) 為頂角的矩形，而且除非頂角 (a,b) 剛好落在曲線上，否則還會有剩餘。這樣一來，第 (ii) 和第 (iii) 部分只不過是選取適當的 f，再計算兩個積分而已。

解答

第 (i) 部分

由於 f 連續（continuous）且斜率（gradient）為正，它是嚴格遞增（strictly increasing）的，因此反函數（inverse function）f^{-1} 存在，而且同樣遞增；又 $f(0) = 0$ 表示曲線 $y = f(x)$ 從原點出發。

設 A 為 $0 \le x \le a$ 範圍內曲線與 x 軸之間的區域，其面積為 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$。設 B 為 $0 \le y \le b$ 範圍內曲線與 y 軸之間的區域；對 y 積分，其面積為 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$。這兩個區域位於曲線的兩側，所以不會重疊。



先假設 $b \le f(a)$，如圖所示。矩形 $0 \le x \le a$、$0 \le y \le b$ 中的每一點，要麼位於曲線上或其下方（因而屬於 A），要麼位於曲線上或其左方（因而屬於 B）。所以 A 和 B 合起來覆蓋了面積為 ab 的矩形，$(*)$ 成立。多出的部分是 A 中位於直線 $y = b$ 以上的部分，即 $f^{-1}(b) \le x \le a$ 範圍內夾在該直線與曲線之間的狹長區域。

若改為 $b \ge f(a)$，只需把兩者的角色對調，同樣的論證仍然成立：矩形被覆蓋，而這次多出的部分是 B 中位於直線 $x = a$ 右方的部分。

因此 $(*)$ 在所有情況下都成立，而等號成立需要多出部分的面積為零。當 $a, b > 0$ 且 $b \ne f(a)$ 時，多出的部分由曲線和一條直線圍成，兩者只在一端相交，所以其面積為正。因此，對於 $a > 0$ 及 $b > 0$，

$$\text{等號成立當且僅當} b = f(a),$$

即矩形的頂角 (a, b) 落在曲線上的時候。

第 (ii) 部分

當 $p > 1$ 時，$f(x) = x^{p-1}$ 在 $x \ge 0$ 上連續，$f(0) = 0$，並在該範圍內嚴格遞增，所以 $(*)$ 適用。（其斜率 $(p-1)x^{p-2}$ 在 $x > 0$ 時為正；若 $p < 2$，斜率在 0 處趨於無窮大，但這不影響面積的論證。）其反函數為 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$。

條件 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 給出 $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$，所以

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

於是 $f^{-1}(y) = y^{q-1}$，而兩個積分分別為

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

代入 $(*)$ 得

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

即為所求。

想一想 等號條件 $b = f(a)$ 在這裏代表甚麼？又應如何化簡 b^q？

條件是 $b = a^{p-1}$。由於 $(p-1)q = p$，故 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$。所以

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

等號確實成立。

第 (iii) 部分

取 $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ 上的 $f(x) = \sin x$。它是連續的，$f(0) = 0$，而其斜率 $\cos x$ 在 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 時為正，所以它嚴格遞增（斜率只在端點處為零，這不影響論證）。它把 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 映射到 $[0,1]$ 上，反函數為 arcsin，而這正好是 a 和 b 容許的取值範圍。

第一個積分是

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

至於第二個積分，取 $u = \arcsin y$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$，用分部積分法（integration by parts）：

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b \arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

兩者相加，兩個 1 互相抵消，$(*)$ 變成

$$ab \le b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

這就是所求的不等式（inequality），等號在 $b = \sin a$ 時成立。

想一想 a 可以自由選取。選哪一個值才能得到我們想要的不等式？

對於 $t \ge 1$，令 $b = t^{-1}$，它按要求落在 $(0,1]$ 內。把不等式乘以 $t > 0$，並利用 $t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$（因為 $t > 0$，此式成立），得

$$a \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{對所有} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

目標不等式中沒有 a，而右方有一個 t，這正是 $t\cos a$ 在 $a = 0$ 時的值。取 $a = 0$：

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{即} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

驗算

- 當 $t = 1$ 時，最後的不等式變成 $\frac{1}{2}\pi \geq 1$；當 $t = 2$ 時，則變成 $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \geq 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$。
- 當 $t \to \infty$ 時，兩邊都是 $\frac{1}{t}$ 的量級：$\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$，而 $t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \approx \frac{1}{2t}$。所以這個下界約為真實值的一半。
- 我們在 2×10^5 個隨機點 (a, b) 上測試了第 (iii) 部分的不等式；它從未失效，而兩邊的差距只在曲線 $b = \sin a$ 附近才縮小至零。我們亦以隨機的 p、a 和 b 驗證了楊氏不等式（Young's inequality），並用辛普森法則（Simpson's rule）核對了兩個積分。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只畫出 $b \leq f(a)$ 的情況。$b \geq f(a)$ 的情況是對稱的，但你應該明確指出這一點。
- 寫出 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ 之後，沒有察覺 $1/(p-1) = q - 1$，以致得不出積分 b^q/q。
- 在最後一步中，試圖尋找使界限最佳的 a。那個 a 是 $\arcsin(t^{-1})$，但它只會給出一個平凡的恆等式。最簡單的選擇 $a = 0$ 才是行得通的那一個。

STEP 之外

第 (ii) 部分就是楊氏不等式，它是推導赫爾德(Hölder)不等式 $\sum |x_i y_i| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$ 的標準途徑，而赫爾德不等式又是分析學中 L^p 空間（L^p spaces）的基礎。把 $\int f$ 與 $\int f^{-1}$ 配對的做法，正是勒讓德變換（Legendre transform）和凸對偶（convex duality）的雛形，這些概念在力學（由拉格朗日量（Lagrangian）過渡到哈密頓量（Hamiltonian））和最佳化（optimisation）中都會再次出現。有關分析學的背景知識，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。