詳細解答

STEP III 2011，第 3 題

純數學 • 解三次方程

> **STEP III 2011，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q3

關鍵思路

兩個立方 $(x-\alpha)^3$ 和 $(x-\beta)^3$ 為我們提供兩個可自由選取的常數 a 和 b，而一個沒有 x^2 項的首一三次多項式（monic cubic）要符合四個條件。因此我們用其中兩個條件求出 a 和 b，其餘兩個條件就必須恰好是二次方程所給出、關於 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 的事實。一旦把三次式寫成兩個立方之和（sum of two cubes），令它等於零便化為「某個比的立方等於一個常數」，只要取立方根（cube root）便可解出，而且三個立方根都要取。

解答

把三次式寫成兩個立方之和

由於 $p\neq 0$，二次方程 $pt^2-qt+p^2=0$ 滿足

$$\alpha+\beta=\frac{q}{p},\qquad \alpha\beta=\frac{p^2}{p}=p,$$

而其判別式（discriminant）為 q^2-4p^3。因此條件 $q^2\neq 4p^3$ 正好表示 $\alpha\neq\beta$。此外 $\alpha\beta=p\neq 0$，故兩個根都不為零。

展開得

$$a(x-\alpha)^3+b(x-\beta)^3=(a+b)x^3-3(a\alpha+b\beta)x^2+3(a\alpha^2+b\beta^2)x-(a\alpha^3+b\beta^3).$$

要與 $x^3-3px+q$ 的係數相符，我們需要

$$a+b=1,\qquad a\alpha+b\beta=0,\qquad a\alpha^2+b\beta^2=-p,\qquad a\alpha^3+b\beta^3=-q.$$

頭兩條是 a 和 b 的線性方程。把 $b=1-a$ 代入第二條，得 $a(\alpha-\beta)=-\beta$；由於 $\alpha\neq\beta$，

可以兩邊相除：

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

現在驗證其餘兩個條件會自動成立：

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$
$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

所以，取這兩個 a 和 b 的值，

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

此即所求。

解 $x^3 - 24x + 48 = 0$

這裏 $p = 8$、$q = 48$，而 $q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$，所以上述結果適用。對應的二次方程是 $8t^2 - 48t + 64 = 0$，即 $t^2 - 6t + 8 = 0$，其根為 2 和 4。取 $\alpha = 2$、$\beta = 4$；則 $a = 2$、$b = -1$，於是

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

（快速展開即可確認：$2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$。）

? **想一想** 我們怎樣把 $2(x - 2)^3 = (x - 4)^3$ 變成可以求解的形式？

兩邊除以 $(x - 4)^3$。這樣做是容許的，因為 $x = 4$ 不是根（$64 - 96 + 48 = 16$）。方程變成

$$\left(\frac{x - 2}{x - 4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

記 $c = 2^{1/3}$。立方等於 $\frac{1}{2}$ 的複數為 $k = c^{-1}$、$c^{-1}\omega$ 和 $c^{-1}\omega^2$。對每一個值，解 $\dfrac{x - 2}{x - 4} = k$：

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

由於 $k \neq 1$，這一步是成立的。映射 $k \mapsto x$ 是一一對應（one-to-one）的，所以 k 的三個值給出三個不同的根，它們必然就是該三次方程的全部根。

當 $k = c^{-1}$ 時，分子分母同乘以 c：

$$x = \frac{2c - 4}{c - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3})}{1 - 2^{1/3}},$$

這正是題目所給的解。當 $k = c^{-1}\omega$ 時，分子分母同乘以 $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$（利用 $\omega^3 = 1$）：

$$x = \frac{2c\omega^2 - 4}{c\omega^2 - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega^2)}{1 - 2^{1/3}\omega^2},$$

同理，$k = c^{-1}\omega^2$ 給出

$$x = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega)}{1 - 2^{1/3}\omega}.$$

所以三個解為 $x = \dfrac{2(2 - 2^{1/3}\omega^j)}{1 - 2^{1/3}\omega^j}$，其中 $j = 0, 1, 2$。

$p = r^2$、$q = 2r^3$ 的情況

此時 $q^2 = 4r^6 = 4p^3$，正是上述方法所排除的情況：二次式 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t - r)^2$ 有重根（repeated root）$t = r$，我們無法求出 a 和 b。不過，二次方程有重根，暗示三次方程也有重根。事實上，代入 $x = r$ 得 $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$，而導數（derivative）$3x^2 - 3r^2$ 在 $x = r$ 處亦為零，所以 $(x - r)^2$ 是一個因式。比較 x^3 項和常數項，得

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^2(x + 2r).$$

根為 $x = r$（二重根）和 $x = -2r$。

> **想一想** 我們能否從先前的公式得出這些根？

不能。當 $\alpha = \beta$ 時，兩個立方合而為一，所以 $a(x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^3$ 只可能是 $(x - \alpha)^3$，它沒有 x 項可與 $-3px$ 相配。這就是我們需要另一種方法的原因。把三次式寫成 $(x - r)$ 的冪，便可看出實際情況：$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^3 + 3r(x - r)^2$，所以二重根正好位於二次方程的重根 $t = r$ 處。

驗算

- 實根為 $2(2 - 1.259921)/(1 - 1.259921) \approx -5.694644$，代入後得 $x^3 - 24x + 48 \approx 0$，誤差約為 10^{-13}。另外兩個根為 $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$，殘差同樣為零。
- 三個根之和為 0（因為沒有 x^2 項），積為 -48：$-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$。
- 一個實根加兩個複根，與理論相符：$x^3 - 3px + q$ 只有在 $q^2 < 4p^3$ 時才有三個實根，而這裏 $q^2 > 4p^3$。
- 該恆等式（identity）可以用數值檢驗：我們對 2000 組隨機的 (p, q)，在隨機複數 x 處作了檢驗，並對多個 r 值檢驗了因式分解 $(x - r)^2(x + 2r)$。

常見錯誤

- 只取 $\frac{1}{2}$ 的實立方根，因而只找到一個解。三次方程有三個根，它們分別來自三個立方根。
- 搞錯 a、b 各自對應哪個根：a（即 $(x-\alpha)^3$ 的係數）的分子是 β。
- 在消去分母時把 ω 和 ω^2 對調。由於這兩個答案是一對共軛（conjugate pair），無論哪種做法，最終得到的根集合都相同。

STEP 之外

這是十六世紀解三次方程方法的一個版本，通常歸功於卡爾達諾（Cardano）和塔爾塔利亞（Tartaglia）：先化為沒有 x^2 項的「缺項」三次方程（depressed cubic），再解一個輔助二次方程（即預解式（resolvent））。伽羅瓦理論（Galois theory）解釋了為何三次和四次方程有這樣的預解式，而一般的五次方程卻沒有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）為通往這些概念提供了一條易讀的路徑。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。