詳細解答

STEP III 2011，第 2 題

純數學 • 多項式的有理根

> **STEP III 2011，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q2

關鍵思路

將 $\mathrm{f}(p/q) = 0$ 乘以 q^{n-1}，除了一個分母外，其餘分母全部消去：首項變成 p^n/q，而其餘各項都是整數。因此 p^n/q 必須是整數；由於 p 與 q 沒有公因數，這就迫使 $q = 1$。此後，每一部分都變成關於整數根的問題，而這些根可以從大小、整除性，或者更巧妙地從奇偶性（parity）加以排除。

解答

開首的結果

設 $\mathrm{f}(p/q) = 0$，其中 p、q 為互質（coprime）整數，且 $q > 0$。那麼

$$0 = q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p\, q^{n-2} + a_0 q^{n-1},$$

這是因為項 $a_k(p/q)^k$ 變成 $a_k p^k q^{n-1-k}$，而對每個 $k \le n-1$ 都有 $n-1-k \ge 0$。首項以外的每一項都是整數，所以

$$\frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

是整數；即 q 整除 p^n。

> ? **想一想** 為何 $q \mid p^n$ 會迫使 $q = 1$？

若 $q > 1$，則它有某個質因數 r。於是 r 整除 p^n；由於 r 是質數，它必定整除 p 本身。但這樣 r 便是 p 與 q 一個大於 1 的公因數，這是不可能的。所以 q 沒有任何質因數，又因

$q > 0$，得

$$q = 1.$$

因此 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的每個有理根 p/q 都等於 p，即一個整數。（留意這裏正是用上了 f 是首一（monic）多項式這一點：若首項係數為 a_n，就會剩下 $a_n p^n/q$，而我們只能推斷 $q \mid a_n$。）

以下兩個簡單事實會有幫助。若 m 是一個整數根，則

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

所以 m 整除 a_0；又因 $a_0 \neq 0$，故 $m \neq 0$。

第 (i) 部分

數 $2^{1/n}$ 是 $x^n - 2 = 0$ 的根，而這個多項式是首一的、係數為整數，且 $a_0 = -2 \neq 0$。因此若 $2^{1/n}$ 是有理數，它便會是一個滿足 $m^n = 2$ 的整數 m。但

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

所以正實數 $2^{1/n}$ 嚴格地位於相鄰整數 1 與 2 之間，不可能是整數。因此對每個 $n \geq 2$，$2^{1/n}$ 都是無理數。

第 (ii) 部分

這裏 $n = 3$，$a_0 = 1$。任何有理根都是整除 1 的整數 m，所以 $m = \pm 1$。但

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

所以 $x^3 - x + 1 = 0$ 沒有有理根。

（另一方法：$m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ 是一個包含兩個相鄰整數的乘積，所以是偶數，於是 $m^3 - m + 1$ 是奇數，永不為零。這個奇偶性的想法正是第 (iii) 部分所需要的。）

第 (iii) 部分

多項式 $x^n - 5x + 7$ 是首一的、係數為整數，常數項 $7 \neq 0$，所以任何有理根都是整數 m。我們證明 $m^n - 5m + 7$ 恆為奇數。

- 若 m 為偶數，則 m^n 與 $5m$ 都是偶數，所以 $m^n - 5m + 7$ 是偶數 − 偶數 + 奇數，即奇數。
- 若 m 為奇數，則 m^n 與 $5m$ 都是奇數，所以 $m^n - 5m$ 是偶數，而 $m^n - 5m + 7$ 是奇數。

無論哪種情況，$m^n - 5m + 7$ 都是奇數，特別地它不等於 0。因此對任何 $n \geq 2$，$x^n - 5x + 7 = 0$ 都沒有整數根，從而沒有有理根。

（若改為逐一檢查 7 的因數，便要證明對 $m = \pm 1, \pm 7$ 及每一個 n 都有 $m^n - 5m + 7 \neq 0$；這樣做也行得通，但較為繁瑣；奇偶性則一次過處理所有 n。）

驗算

- 試一個*確實*有有理根的多項式，例如 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$：根 3 與 -2 正如所料都是整數，而且都整除 $a_0 = -6$。
- 非首一的多項式可以有非整數的有理根，例如 $2x - 1$；這就是首項係數為 1 之所以重要的原因。
- 數值上，$2^{1/2} \approx 1.414$ 與 $2^{1/3} \approx 1.260$ 都位於 1 與 2 之間；而 $x^3 - x + 1$ 在 $x = \pm 1$ 時取值 1。以電腦搜尋 3000 個隨機的首一整係數多項式，所找到的有理根全是整數；並確認了對 $|m| \leq 200$、$2 \leq n \leq 14$，$m^n - 5m + 7$ 都是奇數。

常見錯誤

- 乘以 q^n 而非 q^{n-1}：你會得到 $p^n = -q(\cdots)$，這樣也行得通，但之後必須說明 $q \mid p^n$；若乘以 q^{n-1}，分數 p^n/q 便令這一點一目了然。
- 斷言「$q \mid p^n$，所以 $q \mid p$」而不說明原因；論證須經由 q 的一個質因數。
- 在 (iii) 中只檢查了幾個 n 值。論證必須同時對所有 $n \geq 2$ 成立。

STEP 之外

這是首一形式的*有理根定理*（rational root theorem）：若一個有理數是某個首一整係數多項式的根，則它是整數。用代數數論（algebraic number theory）的語言來說，整數是*整閉*（integrally closed）的，而首一整係數多項式的根稱為*代數整數*（algebraic integers）。(iii) 中的奇偶性技巧，是將多項式模一個質數（modulo a prime）約化的最簡單情況；這是證明多項式沒有根或不可約（irreducible）的有力工具。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是很好的下一步讀物，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則發展了代數方面的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。