詳細解答

STEP III 2011，第 11 題

力學 • 剛體轉動

> **STEP III 2011，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q11

關鍵思路

扭轉之後，每條繩仍然由天花板上的固定點連到圓盤邊緣上已轉過 θ 的那一點。因此每條繩的水平部分是圓的一條弦（chord），所以幾何關係要從上方俯視來看。由對稱性，每條繩的情況都一樣，所以鉛直方向的平衡（equilibrium）決定張力（tension），而各張力的水平分量對軸的力矩（moment）之和就給出力偶（couple）。圓盤一經釋放，餘下的就交給能量守恆（energy conservation）。

解答

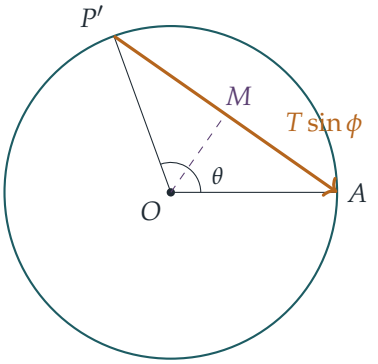
我們把圓盤模型化為剛性均勻薄片（lamina），把繩模型化為輕而不可伸長（inextensible）的繩。由對稱性，所有繩都是拉緊的，張力同為 T，傾角同為 ϕ，而圓盤保持水平，圓心在 z 軸上。當圓盤轉過 θ 時，它會上升至天花板下方深度 h 處。

繩的角度

經過 P 的繩繫於天花板上的 $A = (a, 0, 0)$。轉動後，繩的下端位於

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

從上方看，A 和 P' 都在以軸為圓心、半徑為 a 的圓上，兩者在圓心 O 所夾的角為 θ。所以繩的水平投影（projection）是一條長度為 $2a\sin\frac{1}{2}\theta$ 的弦。



從上方俯視的圖。M 是弦 $P'A$ 的中點，所以 OM 平分角 θ，與弦垂直，且長度為 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$。繩本身長 b，與鉛直方向成角 ϕ，所以它的水平投影長度為 $b\sin\phi$。令兩者相等，得

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

此即所求。繩的鉛直投影則給出圓盤的新深度：

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

由於 $b > 2a$，這個值是實數。由於 $0 < \theta < \pi$，我們有 $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$，所以 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$。

力偶

對圓盤作鉛直方向的分解，n 個相等的張力承托着重量：

$$nT\cos\phi = mg.$$

力偶 C 作用於圓盤所在的平面內，所以對這個平衡沒有影響。

每個張力都有一個鉛直分量，以及一個沿弦由 P' 指向 A 的水平分量 $T\sin\phi$。鉛直分量與軸平行，所以對軸沒有力矩。水平分量沿弦作用，而弦與 O 的垂直距離為 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$。每條繩的水平拉力都傾向把圓盤轉回 $\theta = 0$，所以 n 個力矩的轉向全部相同。對軸取力矩，

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

其中先用了 $nT = mg/\cos\phi$，再用 $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$，最後用 $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$。這就是所求的大小。

由靜止釋放

移去力偶後，圓盤會反向扭回並下降。繩是不可伸長的，且一直保持拉緊，所以不做功：每條繩的張力都與其繫點相對於天花板固定點的速度垂直。重力是唯一做功的力，所以機械能守恆。

由上面的幾何關係，當圓盤由繩鉛直的位置轉過 α 時，其深度為

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

圓盤的動能（kinetic energy）為 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$，其中對軸的轉動慣量（moment of inertia）為 $I = \frac{1}{2}ma^2$。

想一想 當繩處於鉛直時，圓盤的圓心是否仍有鉛直方向的速度？

沒有。求導得

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

在 $\alpha = 0$ 時這等於零。那一刻繩是鉛直的，圓盤處於最低點，所以此時全部動能都是轉動動能。

圓盤由深度 $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$ 下降至深度 b。能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

即

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

此即所求。

驗算

- *虛功（virtual work）*。逆着力偶把圓盤再轉 $\delta\theta$，圓盤會升高 $-\delta z$，所以 $C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$。這與我們取力矩所得的力偶完全一致。
- *小扭轉*。當 θ 很小時，$C \approx mga^2\theta/b$，這正是大家熟悉的雙線懸掛（bifilar suspension，這裏是 n 線懸掛）的回復力偶。
- *數值驗證*。我們在三維空間中明確放置 n 條繩，並對隨機的 a, b, θ, m, n 把各張力的力矩加起來，結果與公式吻合。我們亦取 $a = 1$、$b = 3$、$\theta = 2$、$g = 9.81$，以數值方法積分釋放後的運動，得出繩變成鉛直時 $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$，與 $3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$ 相符。

常見錯誤

- 把水平張力的力臂（lever arm）當作 a 而不是 $a\cos\frac{1}{2}\theta$。這個力沿弦作用，而不是沿切線作用。
- 忘記圓盤在扭轉時會上升。這個高度變化正是最後一部分中能量的來源。
- 把平移動能 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ 計算在內，卻沒有留意到它在繩鉛直時等於零。

STEP 之外

這是一個運動受約束、只有一個自由度（degree of freedom）的系統。深度是扭轉角的固定函數（function），所以能量只取決於 α 和 $\dot{\alpha}$。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）把這個觀察轉化為運動方程。它也解釋了為何力偶恰好是 $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$，這就是虛功原理。在 $\alpha = 0$ 附近線性化，便得到簡諧（simple harmonic）扭轉振動（torsional oscillations），而雙線懸掛正是藉此用來量度轉動慣量。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以這個程度講解剛體轉動和能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。