詳細解答

STEP III 2011，第 10 題

力學 • 彈性繩與簡諧運動

STEP III 2011，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s3-q10

關鍵思路

兩個質點組成的系統不受任何外來的水平力，所以它們的質心（centre of mass）以由衝量（impulse）決定的恆定速率運動。相對於質心，弦的伸長量（extension）遵從簡諧運動（simple harmonic motion），而弦恰好在半個振動週期內保持拉緊。把運動拆分為「質心」加「伸長量」兩部分，每個答案幾乎不費功夫便會自然得出。

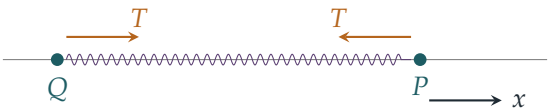
解答

模型與設定

兩質點在光滑水平面上運動，因此它們所受的水平力只有輕弦的張力（tension），而這兩個力大小相等、方向相反。取直線 QP 為 x 軸，方向由 Q 指向 P，並設 Q 起初位於 $x = 0$，P 起初位於 $x = a$。設 x_P 和 x_Q 為施加衝量後時間 t 時兩者的位置，並設

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

為弦的伸長量。施加衝量後一刻，$\dot{x}_P = u$，$\dot{x}_Q = 0$ 及 $e = 0$，且 $\dot{e} = u > 0$，因此弦立即變得拉緊。



弦拉緊期間，由胡克定律（Hooke's law）得張力

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2 e}{a} = \frac{1}{2}m\omega^2 e.$$

張力把 P 往回拉向 Q，並把 Q 向前拉向 P：

$$m\ddot{x}_P = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

質心

把兩條方程相加，得 $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$。因此位於 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$ 的質心 G 以恆定速度運動，該速度等於其初始值：

$$\dot{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(u + 0) = \tfrac{1}{2}u.$$

（這其實就是動量守恆（conservation of momentum）：總動量 mu 由質量 $2m$ 共同分擔。）

伸長量

把兩條方程相減，

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

這是角頻率（angular frequency）為 ω 的簡諧運動。由 $e(0) = 0$ 及 $\dot{e}(0) = u$，得

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

想一想 為甚麼角頻率是 ω，而不是 $\omega/\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}\,\omega$？

每個質點所受的力都是 $\frac{1}{2}m\omega^2 e$，但 e 的變化源於兩個質點都在運動：把方程相減時，兩者的加速度相加。換一個角度看，兩個質量同為 m 的質點，其約化質量（reduced mass）為 $\frac{1}{2}m$，而弦的勁度（stiffness）為 $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$，所以 $\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$。題目特意選取這個彈性模量（modulus），令結果整齊漂亮。

弦的長度下一次等於 a，是在 $e = 0$ 再次成立之時，即 $t > 0$ 時首次出現 $\sin\omega t = 0$ 之時：

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

在整段 $0 < t < \pi/\omega$ 期間都有 $e > 0$，所以弦確實一直拉緊，上述方程亦一直成立。

所走的距離

把每個位置寫成質心位置加上或減去間距的一半：

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a + e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a + e).$$

在 t_1 時，$e = 0$ 再次成立，所以每個質點移動的量都與 G 完全相同，即

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

為確定這個位移就是所走的距離，我們要驗證兩個質點都從不折返。求導得

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1+\cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1-\cos\omega t),$$

而對所有 t，兩者皆 ≥ 0。所以每個質點都只向前移動，各自走了距離 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$，正如所求。

速率

在 $t_1 = \pi/\omega$ 時，$\cos\omega t_1 = -1$，所以

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

因此 P 瞬間靜止，而 Q 以速率 u 向 P 移動。兩個質點恰好交換了速度，就如兩個等質量物體發生完全彈性碰撞（perfectly elastic collision）一樣。這並非巧合：動量守恆，而儲存的彈性勢能已全數轉回動能。

到碰撞為止的時間

在 t_1 之後，Q 向 P 移動，所以間距小於 a。弦變得鬆弛，不施加任何力，兩個質點都不受任何水平力。因此 P 保持靜止，而 Q 由距離 P 為 a 之處開始，以恆定速率 u 移動。它再經過時間 a/u 便到達 P。由施加衝量到碰撞的總時間為

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

驗算

- 動量：在 t_1 時，總動量為 $m\cdot 0 + mu = mu$，與開始時相同。能量：兩個時刻的動能都是 $\frac{1}{2}mu^2$，而兩次弦都處於自然長度。
- 量綱：u/ω 是長度，a/u 是時間，理應如此。
- 我們取 $m = a = \omega = u = 1$，以數值方法逐步計算運動方程。弦在 $t = 3.14159$ 時變得鬆弛，此時每個質點都移動了 $1.57080 = \pi/2$；兩者的速率分別為 0 和 1，而碰撞發生在 $t = 4.14159 = \pi + 1$。

常見錯誤

- 把 P 當作繫於固定點，這會得出角頻率 $\omega/\sqrt{2}$ 和錯誤的時間。弦的兩端都在移動。
- 在 t_1 之後仍沿用簡諧運動。弦一旦短於 a 便會鬆弛，運動變為勻速。
- 完全忘記最後一段：碰撞發生在弦回復自然長度之後再過 a/u。

STEP 之外

把二體問題（two-body problem）拆分為質心的運動和間距的運動，而後者由約化質量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 支配，是大學一年級力學中最有用的技巧之一。它把行星軌道、振動中的雙原子分子以及碰撞的粒子都化為單體問題。在本題中，彈性弦就像一次「柔軟」的碰撞，歷時 π/ω，但結果與瞬間發生的彈性碰撞完全相同。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對二體約化和約化質量有細緻的推導。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。