詳細解答

STEP III 2011，第 1 題

純數學 • 降階法

> **STEP III 2011，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q1

關鍵思路

第 (i) 部分是一條可分離方程（separable equation），而它的出現是有原因的：把 $y = ze^{-x}$ 代入 $(*)$ 後，得出的正正就是這條方程。含 z 本身的項會互相抵消，只剩下一條只涉及 z' 和 z'' 的方程，而對 $u = z'$ 來說它是一階的。這就是*降階法*（reduction of order）：只要知道一個解（e^{-x}），便可以求出另一個解。第 (iii) 部分則在右方不為零的情況下作同樣的代換，結果變成一條線性（linear）一階方程，可用積分因子（integrating factor）求解。

解答

全題我們都在 $x \neq -1$ 的區間上討論，因此可以除以 $x+1$。

第 (i) 部分

由於

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

分離變數（對 $u \neq 0$）得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

取指數，得 $|u| = e^c\,|x+1|\,e^x$。正負號與因子 e^c 可合併成一個任意常數，而 $u = 0$ 亦是一個解，故通解（general solution）為

$$u = C(x+1)e^x, \qquad C \text{ 為任意常數。}$$

第 (ii) 部分

設 $y = z\mathrm{e}^{-x}$，由乘積法則（product rule）得

$$y' = (z' - z)\mathrm{e}^{-x},$$
$$y'' = (z'' - z')\mathrm{e}^{-x} - (z' - z)\mathrm{e}^{-x} = (z'' - 2z' + z)\mathrm{e}^{-x}.$$

代入 $(*)$，並消去非零因子 e^{-x}：

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + (-2(x+1) + x)z' + ((x+1) - x - 1)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

所有 z 項都完全抵消了。記 $u = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，再除以 $x+1$，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = 0,$$

這是一條關於 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的一階方程，正如題目所要求。它恰好就是第 (i) 部分的方程。

想一想 為甚麼 z 項會消失？我們能否事先預料到？

z 的係數就是代入 $z = 1$ 所得的結果，即在 $(*)$ 中檢驗 $y = \mathrm{e}^{-x}$。由於 $(x+1)\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$，$y = \mathrm{e}^{-x}$ 本身已經是一個解，所以常數 z 必定滿足方程，因此不可能剩下單獨的 z 項。這正是選用這個代換的原因。

由第 (i) 部分，$z' = C(x+1)\mathrm{e}^{x}$。用分部積分（integration by parts），

$$\int (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = (x+1)\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} + \text{常數},$$

所以

$$z = Cx\mathrm{e}^{x} + B.$$

因此 $y = z\mathrm{e}^{-x} = Cx + B\mathrm{e}^{-x}$，把 C 改名為 A，得

$$y = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 為任意常數。$(*)$ 的每一個解都可以這樣得到，因為任何 y 都可以寫成 $z\mathrm{e}^{-x}$，其中 $z = y\mathrm{e}^{x}$；所以這就是通解，正如題目所要求。

第 (iii) 部分

同樣的代換只會改變右方，右方變成 $(x+1)^2$ 除以 e^{-x}：

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2\mathrm{e}^{x}.$$

設 $u = z'$，再除以 $x+1$，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

這是線性方程。由第 (i) 部分，$(x+1)\mathrm{e}^x$ 是齊次（homogeneous）方程的解，所以它的倒數 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$ 是一個積分因子。（它在相差正負號的意義下等於 $\exp(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x)$。）兩邊同乘，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

其中 k 為常數。所以

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

第二項積分後得 $kx\mathrm{e}^x$，與第 (ii) 部分相同。至於第一項，用兩次分部積分，

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{常數} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{常數}.\end{aligned}$$

因此 $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$，而

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$ 可併入任意的 kx 中，所以記 $A = k-1$，通解為

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 為任意常數。

另一方法：由於右方是二次式，我們可以嘗試特解（particular integral）$y = px^2+qx+r$。代入得 $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2+2px+2p-r$，與 x^2+2x+1 比較係數，得 $p=1$、$r=1$，而 q 可任意取值（因為 x 是一個餘函數（complementary function））。再加上第 (ii) 部分的餘函數，便得出相同的答案。

驗算

直接代入 $y = x^2+1$：$y' = 2x$，$y'' = 2$，所以左方為 $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$，符合要求。數值上，隨機選取 A、B 及 $x \in (-0.9, 3)$，以有限差分（finite difference）計算 $y = x^2+1+Ax+B\mathrm{e}^{-x}$ 的導數，結果滿足方程的誤差約在 3×10^{-6} 以內；同樣的測試亦驗證了第 (i) 和第 (ii) 部分。

常見錯誤

- 把 y'' 算錯：它是 $(z''-2z'+z)\mathrm{e}^{-x}$，$z$ 前面是加號；這裏若出現正負號錯誤，便會留下一個多餘的 z 項。

- 在第 (iii) 部分消去因子 e^{-x} 時，忘記把右方乘以 e^{x}。
- 漏掉常數：最終答案需要兩個任意常數，每次積分各產生一個。

STEP 之外

降階法是一種通用技巧：若 y_1 是某條線性二階方程的解，代入 $y = y_1 v$ 必定會消去 v 項，剩下一條關於 v' 的一階方程。這亦是*參數變易法*（variation of parameters）背後的思路，該方法對任何右方都能求出特解。兩者在 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）中都有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。